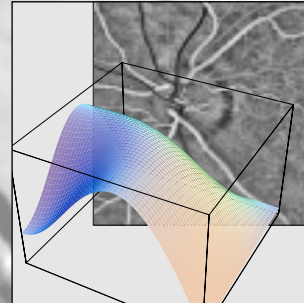
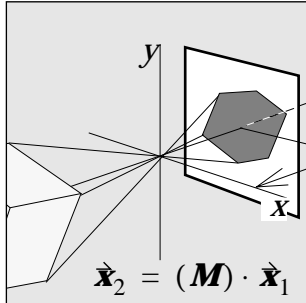
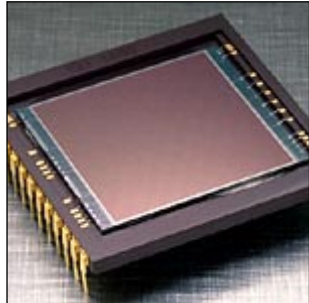


COMPUTER- VISUALISTIK



Teil A Grundlagen und Abbildungsverfahren

Textbuch zur Vorlesung
„Digitale Bildverarbeitung I— Grundlagen und Abbildungsverfahren“
V2/Ü1 — Wintersemester

Prof. Dr.-Ing. Dietrich Meyer-Ebrecht
Lehrstuhl für Messtechnik und Bildverarbeitung
RWTH Aachen
Walter-Schottky-Haus (Geb. 24, Erweiterungsgelände Melaten)

Sekretariat: (0241) 80.27860 — LfM@RWTH-Aachen.De

Internet: www.lfm.rwth-aachen.de
(aktuelle Informationen zu den Lehrveranstaltungen, Prüfungen etc.)

Version V 2.5 — Oktober 2003

Herausgegeben vom
Lehrstuhl für Messtechnik und Bildverarbeitung der RWTH Aachen

Alle Urheberrechte liegen beim Autor

Verwendung der Inhalte auch auszugsweise nur mit ausdrücklicher
schriftlicher Genehmigung des Autors

Inhalt

Begriffe und Symbole	a
Begriffe zu Teil A	a
Begriffe zu Teil B	b
Formelzeichen und Operatoren	c
Einführung	1
Visualistik – ein neuer Begriff für ein uraltes Thema	1
“Ein Bild sagt mehr als tausend Worte”	1
Computer-Visualistik	3
Ziele und Anwendungsgebiete	5
A Der Abbildungsprozess	11
Das Bild: Verschlüsselung der Realität	11
1 Abbildungsmodelle	15
1.1 Die ‘Abtastung’ des Objektraumes	15
1.1.1 Geometrisches Abbildungsmodell (16)	
1.1.2 Lochkamera (18)	
1.1.3 Zentralprojektion (19)	
1.1.4 Rekonstruktion der Objektposition (20)	
1.2 Unschärfe der Intensitätsmessung	21
1.2.1 Rauschquellen begrenzen die Kontrastauflösung (22)	
1.2.2 Die Relation von Objektgröße und Grenzkontrast (25)	
1.2.3 Quantenrauschen: die ultimative Abbildungsgrenze (26)	
1.3 Unschärfe der Ortszuordnung	29
1.3.1 Die “Point Spread Function” — PSF (30)	
1.3.2 Faltung (32)	

2	Mehrdimensionale Systemtheorie	35
2.1	Aufgaben der Systemtheorie	35
2.2	Die diskrete Fourier–Transformation	36
2.2.1	Ein kleiner Exkurs in die Grundlagen (37)	
2.3	Zweidimensionale diskrete Fourier–Transformation (2D–DFT)	42
2.3.1	Herleitung der 2D–Transformierten aus 1D–Funktionen (43)	
2.3.2	Streifenmuster, harmonische Wellen (44)	
2.3.3	Die 2D–rect–Funktion (45)	
2.3.4	Die zweidimensionale Gauß–Funktion (46)	
2.3.5	Punkt, Punktraster und Gerade (46)	
2.4	OTF— MTF — PTF	48
2.5	Theoreme der 2D–DFT	50
2.5.1	Grundlegende Sätze der 2D–DFT (51)	
2.5.2	Das 2D–Abtasttheorem (52)	
2.5.3	Zentralschnitt–Theorem (53)	
3	Zweidimensionale Bildsensoren	55
3.1	Abbildung — ein Messproblem	56
3.2	Das Vidicon	59
3.2.1	Erzeugung eines Ladungszwischenbildes: physikalische Grundlage (59)	
3.2.2	Die Elektronenstrahl–Abtastung des Ladungsbildes (60)	
3.2.3	Das Signalmodell des Vidicons (61)	
3.3	Der CCD–Matrixsensor	63
3.3.1	Der “Photogate”–Sensor (64)	
3.3.2	Das CCD –Schieberegister (64)	
3.3.3	CCD–Auslesearchitektur (66)	
3.4	Konfokale Laserscanner	68
3.5	Die Gammakamera	71
3.6	Ultraschall–Scanner	72
4	Die 3D–Rekonstruktion aus Projektionen	77
4.1	Dreidimensionale Abbildung — räumliches Sehen	77
4.1.1	Sehen wir dreidimensional? (77)	
4.1.2	Ansätze zur abbildungstechnischen Erschließung der 3. Dimension (80)	

4.2	Computer–Tomographie mit Röntgenstrahlen (CT)	82
4.2.1	Rekonstruktion im Spektralbereich (83)	
4.2.2	“Filtered Backprojection” (85)	
4.2.3	CT — ein abbildendes Meßverfahren (87)	
4.2.4	Anmerkungen zum Rekonstruktionsverfahren (89)	
4.3	Magnetresonanz–Tomographie (MR)	92
4.3.1	Physikalische Grundlage der MR–Bildgebung (93)	
4.3.2	Realisierung einer ortsselektiven Messung (94)	
4.3.3	Das Rekonstruktionsverfahren (95)	
4.3.4	Technische Voraussetzungen (97)	
4.4	Dreidimensionale Abbildung von Isotopenverteilungen	99
4.4.1	SPECT–Bildgebung (99)	
4.4.2	PET–Bildgebung (100)	
5	Restauration und Enhancement	101
5.1	Ziele einer Bild(nach)verarbeitung	101
5.2	Monadische Bildoperationen	103
5.3	Punkt–Operationen	105
5.3.1	Allgemeine Grauwert– bzw. Kontrasttransformation (105)	
5.3.2	Histogramm–Equalisierung (106)	
5.3.3	Adaptive Histogramm–Equalisierung (108)	
5.4	Lokale Operationen	110
5.4.1	FIR–Filter (110)	
5.4.2	Zur Implementierung der diskreten Faltungsoperation (116)	
5.4.3	Rekursive Filter (117)	
5.4.4	Medianfilter (120)	
5.4.5	Optimalfilter (121)	
5.5	Globale Operationen	125
5.5.1	Die DFT (125)	
5.5.2	Filterimplementierung im Spektralbereich vs. Ortsbereich (126)	
5.5.3	Die diskrete Cosinus–Transformation (DCT) (127)	
5.6	Geometrische Operationen	128

B	Bildanalyse	133
	Das Bild — ein komplexes Meßsignal	133
6	Von Pixeln zu Segmenten	141
6.1	Lokale Merkmale	143
6.1.1	Textur (144)	
6.1.2	Statistische Merkmale (146)	
6.1.3	Mikrostruktur-Merkmale (149)	
6.1.4	Spektrale Merkmale (152)	
6.1.5	Wavelets (153)	
6.1.6	Mehrschrittige Merkmals-Extraktion (154)	
6.1.7	Validierung der Merkmals-Extraktion (154)	
6.2	Von Kanten zu Konturen: Kanten-orientierte Segmentierung	155
6.2.1	Die Gestaltgesetze (157)	
6.2.2	Was ist eine Kante? (158)	
6.2.3	Kanten-Detektoren (159)	
6.2.4	Ausdünnung von Kanten zu Konturen (163)	
6.3	Regionen-orientierte Segmentierung	166
6.3.1	Schwellwert-Verfahren (166)	
6.3.2	'region-growing' (168)	
6.3.3	'split-and-merge' (169)	
6.3.4	Signalmodell-basierte Segmentierung (171)	
7	Form und Gestalt: Analyse und Bearbeitung	173
7.1	Von den Pixeln zur Gestalt	174
7.1.1	Die diskrete Geometrie der Pixelwelt (176)	
7.2	Kontinuierliche und diskrete Konturbeschreibungen	178
7.2.1	Kontinuierliche Konturbeschreibungen (179)	
7.2.2	Fourier-Deskriptoren (181)	
7.2.3	Diskrete Konturbeschreibung (182)	
7.2.4	Approximation einer kontinuierlichen Kontur (184)	
7.3	Mit Gestaltkriterien auf Kontursuche	187
7.3.1	Die Hough-Transformation (188)	
7.3.2	Aktive Konturen (190)	
7.3.3	Morphologische Operationen auf binären Bildern (191)	

8	Klassifikation	195
8.1	Der Merkmalsraum	197
8.2	Eine Metrik für die Ähnlichkeit	198
8.3	Das Entscheidungsproblem	199
8.3.1	Die Bayes-Entscheidungsregel (200)	
8.3.2	Ein einfaches Beispiel (201)	
8.3.3	Entscheidungsflächen im mehrdimensionalen Merkmalsraum (201)	
8.4	Überwacht lernende Klassifikatoren	203
8.4.1	Parametrische Klassifizierer (203)	
8.4.2	Nichtparametrische Klassifikationsverfahren (204)	
8.4.3	Neuronale Netze (206)	
8.5	Unüberwacht lernende Klassifikatoren	208
8.5.1	Die Clusteranalyse (209)	
9	Bilddaten-Kompression	211
9.1	Signal-basierte Kompression: Prädiktionskodierung	213
9.2	Spektrum-basierte Kompression: Transformationskodierung	216
9.3	JPEG — Beispiel eines verbreiteten Standards	217
9.3.1	'Lossles JPEG' (218)	
9.3.2	'Lossy JPEG' (218)	
9.4	'Subband coding' — Wavelet-Transformation	219

Stichworte

Anhang

Begriffe und Symbole

Begriffe zu Teil A

Objekt	:= Körper im Objektraum
Szene	:= Ensemble aus Objekten in einem räumlichen Bezug
Objektraum	:= 3-dimensionaler Raum
Voxel	:= durch Diskretisierung des Raumes definierter kleinster Quader, in dem Objekteigenschaften angebbbar sind (korrespondiert üblicherweise zum <i>Pixel</i> , siehe unten)
Bild	:= über eine Abbildung erzeugte Funktion in einem Bildraum, die bestimmte Eigenschaften eines Objekts oder einer Szene beschreibt
Bildraum	:= Raum, in den ein Objekt oder eine Szene abgebildet wird (oft 2-dimensional, auch 1- oder 3-dimensional, bei dynamischen Abbildungen zeitvarianter Objekte bis 4-dimensional)
Pixel	:= Basisflächenelement im diskreten Bildraum, das sich aus dem Samplingraster ergibt; in 3-dimensionalen Bildräumen wird der Basisquader ebenfalls Voxel genannt
Abbildung	:= Prozess, der Objektvoxel in Bildvoxel bzw. Pixel, d.h lokale Eigenschaften aus dem Objektraum in Bildfunktionswerte transformiert; dieser grundsätzlich mit einem Informationsverlust verbundene Prozeß ist im allgemeinen <i>nicht</i> umkehrbar

Begriffe zu Teil B

Segment	:= Region räumlich zusammenhängender Pixel, die bezüglich einer bildinhaltsrelevanten Eigenschaft einem Homogenitätskriterium genügen
Kante	:= lokal begrenzte, sich lateral fortsetzende Fluktuation einer bildinhaltsrelevanten Eigenschaft
Kontur	:= Grenze zwischen Segmenten: Konturen müssen <i>geschlossene</i> Linien sein; Beschreibung als 1-Pixel-breite Linie (Pixelkette)
Konnektivität	:= Definition der Pixelnachbarschaft innerhalb geschlossener Flächen bzw. auf linienhafte Pixelketten: auf kartesischen Gittern 4er- oder 8er-Nachbarschaft
Struktur	:= räumliche Zusammenhänge, z.B. Linie, Baum, Netz
Textur	:= kleinräumige, periodisch wiederkehrende Muster — sowohl das Muster selbst als auch seine Periodizität sind durch stochastische Fluktuationen gekennzeichnet
Merkmal	:= aus lokalen Pixelsituationen abgeleitete Eigenschaften (Gradient, Verbundwahrscheinlichkeit, lokale spektrale Maße...)
Operator	:= Algorithmus zur Durchführung einer lokalen Transformation oder zur Bestimmung eines Merkmals — homogener O., inhaltsabhängiger O. (z.B. "Kantenverfolger")
Klassifikation	:= Ordnen von Instanzen in Klassen; Bestimmung der Klassenzahl und -grenzen, "Cluster"
Datenstruktur	:= Datenrepräsentation: Feld, Vektor, String, Baum, Liste...

Formelzeichen und Operatoren

Allgemein Bildkoordinaten sind stets *finit* und im Fall einer digitaler Darstellung *diskret*

Die Amplitude der Bildfunktion ist im Fall einer digitaler Darstellung *quantisiert*, d.h. die Zahl ihrer Amplitudenstufen ist abzählbar

Bildsensoren haben begrenzte Abmessungen und meist eine abzählbare Anzahl von Sensorelementen

Bildoperationen haben stets einen *finiten Bereich*

x, y, z := Raumkoordinaten, Bildkoordinaten

\vec{x} := Raum- bzw. Bildkoordinaten in Vektorschreibweise

$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \langle x \ y \ z \rangle^T$:= Koordinatenvektor

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{0,0} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$:= Matrix der Dimension $i \cdot j$ (z.B. Transformationsmatrix) mit den Koeffizienten $m_{0 \dots i-1, 0 \dots j-1}$

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:= Faltungskerne (z.B. Filter-Operatoren), ein- und zweidimensional mit den Koeffizienten $a \dots d$

m, n := diskrete Bildkoordinaten

M, N := Bildabmessungen in diskreten Bildkoordinaten

t	:= Zeit
$g_1(x, y, z, t)$:= Beschreibung eines zeitvarianten Objekts oder einer Szene
$g_2(x, y)$:= 2-dimensionale Bildfunktion
$g_2(m, n)$:= Bildfunktion im 2-dimensionalen diskreten Bildraum
$h(m, n)$:= Systemantwort im 2-dimensionalen diskreten Bildraum, "Point Spread Funktion" (PSF)
f_x, f_y	:= Ortsfrequenzen von x - bzw. y -Wellen
k, l	:= Wellenzahlen in x - und y -Richtung
$G_2(f_x, f_y)$:= komplexe Fouriertransformierte einer Bildfunktion
$G_2(k, l)$:= komplexe diskrete Fouriertransformierte einer Bildfunktion
$H(k, l)$:= komplexe diskrete Fouriertransformierte einer Systemantwort, "Optical Transfer Funktion" (OTF)
$H(k, l)$:= Betrag der diskreten Fouriertransformierten einer Systemantwort, "Modulation Transfer Funktion" (MTF)
h_i	:= Histogramm
H_i	:= kumulatives Histogramm
$\hat{g} = E\{g\}, \bar{g}$:= Erwartung, Mittelwert
$h(\vec{x}) * g(\vec{x})$:= Faltung
$F\{g\}, F^{-1}\{G\}$:= Fouriertransformation, inverse Fouriertransformation

Einführung

*Die Sinne sind uns Brücke
vom Unfassbaren zum Fassbaren
— August Macke*

Visualistik – ein neuer Begriff für ein uraltes Thema

Visualistik ist die Wissenschaft von der visuell erfassbaren Information. “Visualistik” ist ein Begriff, der jüngst geschaffen wurde, um die Fülle der Wissens- und Arbeitsgebiete zusammenzufassen, die mit dem Bild, seiner Erstellung, seiner Be- und Verarbeitung und — *last but not least* — seiner Verwendung als Informationsträger in den unterschiedlichsten Anwendungen zu tun haben. Die Vielfältigkeit der Wissensgebiete, die die Visualistik überdeckt oder auch nur berührt — von Teilgebieten der Physik (Optik, Strahlenphysik...) über die Biologie (Physiologie des Auges), Elektrotechnik (Nachrichtentechnik, Informationstheorie...), Medizin (diagnostische Bildfassung), Medienwissenschaft (Rolle des Bildes in der Informationsgesellschaft...) bis hin zur Kunst, um nur einige zu nennen – macht die Visualistik zu einer interdisziplinären Wissenschaft par excellence.

“Ein Bild sagt mehr als tausend Worte”

Bilder sind Informationsträger. Das Bild als Kunstobjekt trägt eine Botschaft, die sein Maler wahrscheinlich mit keinem anderen Medium vermitteln konnte. Das Bild, das eine Reportage illustriert, liefert dem Leser realitätsnahe Eindrücke, wo Worte unvermeidlich abstrahieren und kommentieren. Das Bild — inbegriffen der technische Apparat, mit dem das Bild erstellt wird — erweitert schließlich die visuellen Fähigkeiten unseres natürlichen Sehapparates, indem es uns uneinsehbare Räume erschließt.

Bei der dominanten Rolle, die unser visuelles System für unsere Wahrnehmung spielt, ist es nicht verwunderlich, dass das Bild eine wichtige Funktion für unsere kulturelle Entwicklung innehatte. Im Bild wird festgehalten, was Menschen bewegt: das Tier, das erjagt wird — der Stiefelabdruck auf dem Mond. Von den frühen Höhlenzeichnungen bis zum Einsetzen des “Informationszeitalters” lässt sich eine kontinuierliche Entwicklung der handwerklichen, später dann der technologischen Fähigkeiten und — parallel dazu — auch der künstlerischen Ausdrucksformen zum bildlichen Festhalten von Situationen, Geschehnissen und Eindrücken nachzeichnen. Sie ist eng verbunden mit der Entwicklung der Verfahren und Methoden zur räumzeitlichen Übermittlung des Festgehaltenen — von den ortsfesten Steinzeichnungen bis zu CD-ROM und Internet.

Nun birgt der Terminus “Bild” eine semantische Mehrdeutigkeit in sich: Er steht sowohl für die bemalte Leinwand als auch für die darauf porträtierte Person, sowohl für die röntgenstrahlengeschwärmte Filmfolie als auch für das darauf dargestellte durchleuchtete Organ — er steht also sowohl für das Gefäß als auch für dessen Inhalt. Diese Doppeldeutigkeit rührt sicherlich aus der Entwicklungsgeschichte des Bildes: Medium und Dargestelltes waren zunächst untrennbar miteinander verbunden. So ist beispielsweise selbst heute noch ein Röntgenfilmblatt — das “Röntgenbild” — gleichermaßen das Medium für die Aufzeichnung der zu durchleuchtenden Körperregion, für den Transport und die Speicherung des so gewonnenen Abbildes und schließlich für die Visualisierung desselben.

Die technische Entwicklung hat jedoch inzwischen Technologien hervorgebracht, die jeweils auf die einzelnen Teilprozesse, die ein Bild auf seinem Weg von der Erstellung bis zur Visualisierung erfährt, spezialisiert sind. Nicht mehr ein einziges Medium nimmt das Abbild eines Objektes auf, trägt es und bietet es wieder dar: So wird in einer Videokamera das Objekt bzw. die Szene zunächst mittels einer Optik als ebenes Abbild auf die lichtempfindliche Fläche eines Camerachips projiziert. Dort entsteht ein elektrisches Ladungsbild, das in eine zeitliche Folge von Spannungsimpulsen umgewan-



delt wird: das *analoge Fernsehbild*. Ein AD-Converter produziert daraus eine Folge von Datenwerten, die als Datensatz abgelegt, umgeformt oder transportiert werden können — das digitale Bild. Nach Rückwandlung in ein analoges Signal wird daraus eine Leuchtdichteverteilung auf dem Bildschirm einer Kathodenstrahlröhre — das *Displaybild*.

In dieser Vielgestalt ist das Bild der zentrale Gegenstand der Visualistik. Deren in dieser Vorlesung behandeltes Teilgebiet *Computer-Visualistik* befasst sich schwerpunktmäßig mit den Prozessen, mit denen die Informationstechnik beiträgt, Bilder zu erfassen, bildhafte Informationen zu verarbeiten und wiederum visuelle Darstellungen hervorzubringen.

Auch hier müssen wir uns wieder der Dichotomie des Wortes “Bild” bewusst sein: Aus dem Kontext wird jeweils zu entscheiden sein, ob das Abbild eines Objektes, d.h. die dieses Abbild repräsentierende zwei-, drei- oder vierdimensionale Funktion einer physikalischen Größe, kurz die individuell vorliegende *Signalfunktion* gemeint ist oder deren elektronische Manifestation, also z.B. der als Fernsehstandard festgelegte Spannungsverlauf auf einer Übertragungsleitung oder die als (Daten-)Feld vereinbarte Variable in einem Computerprogramm — Instanz oder Klasse, um mit den Termini der objektorientierten Programmierung zu sprechen.

Computer-Visualistik

— nur ein neuer Terminus für ein Teilgebiet der Computeranwendung, der *digitalen Bildverarbeitung*? Wenn wir heute den facettenreichen Umgang mit Bildinformationen im Vergleich zur Ursprungszeit des Begriffes betrachten, als die digitale Bildverarbeitung (englisch: *digital image processing*) so etwas war wie ein Untergebiet der digitalen Signalverarbeitung (*digital signal processing*), dann war ein neuer Begriff notwendig, um das Zusammenwachsen der in unterschiedlichen methodischen Domänen wurzelnden Teilgebiete deutlich zu machen.

Die Hauptachse der Computer-Visualistik wird durch die Stationen des Bildes *Abbildungsprozess* — *Verarbeitung/Analyse* — *Darstellung* markiert.

Das Teilgebiet *Abbildungsprozess* umfasst nicht nur die zahlreichen anwendungsspezifischen Sensortechnologien, sondern vor allem auch die Verfahren zur Rekonstruktion räumlicher Objekte aus nicht räumlichen Primärinformationen – Technologien und Verfahren, die unsere natürlichen visuellen Fähigkeiten gewaltig erweitern und uns Objekte oder Objektbereiche visuell zugänglich machen, zu denen wir ohne diese “Brille” keinen unmittelbaren Zugang haben.

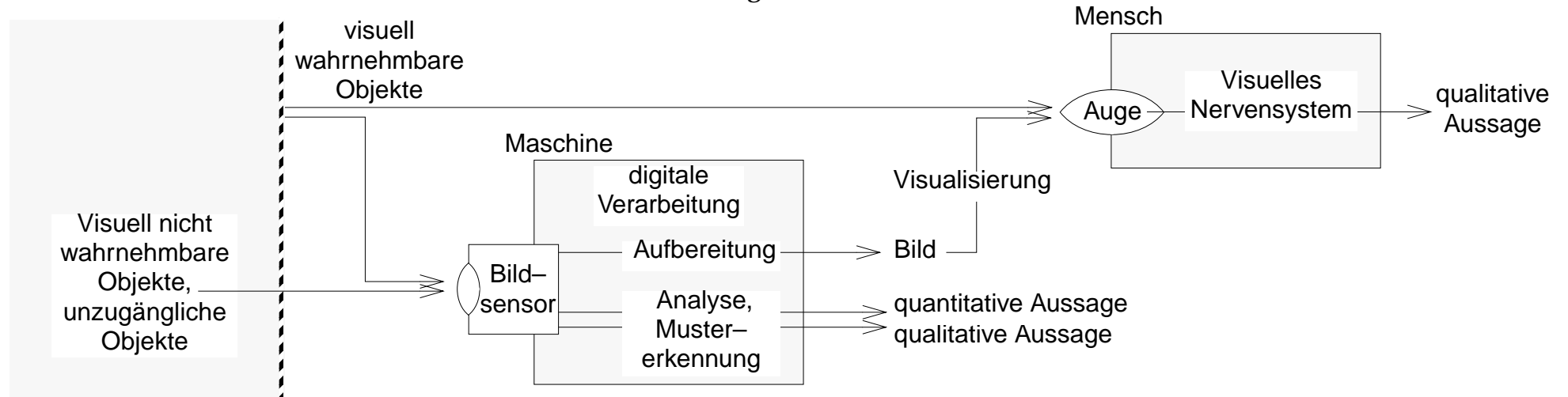
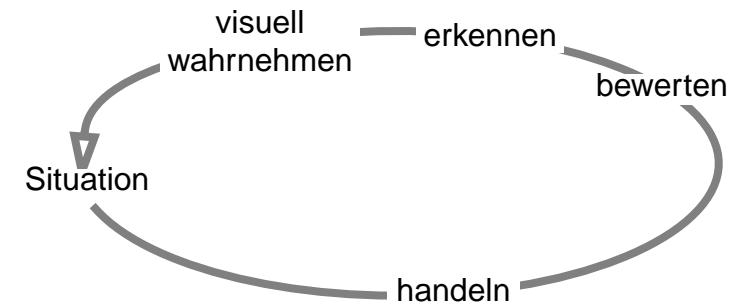
Das Teilgebiet *Bildverarbeitung* behandelt zum einen Verfahren zur zielgerichteten Aufbereitung des primären Bildmaterials und erweitert damit die klassischen Signalverarbeitungsmethoden der Nachrichtentechnik zu einer mehrdimensionalen Systemtheorie, die auch für die systematische Beschreibung des Abbildungsprozesses grundlegend wichtig ist. Hierher gehören auch die Bildcodierungsverfahren, die vor allem dadurch Bedeutung gewonnen haben, dass Bilder zunehmend Bestandteil der multimedialen Kommunikation werden. Zum anderen behandelt dieses Teilgebiet Verfahren zur (automatischen) Auswertung, die klassischerweise dem Bereich der Mustererkennung zugeordnet werden.

Das dritte Teilgebiet der Computer-Visualistik widmet sich der *Visualisierung*. Hier verbindet sich die klassische Bildverarbeitung, deren Ziel es u.a. ist, dem Beobachter ein interpretationsfähiges Bild des abgebildeten Objektes zu präsentieren, mit dem eigenständigen Fachgebiet der *Computer-Grafik*, das ein leistungsfähiges Instrumentarium hervorgebracht hat, um komplizierte und vor allem höherdimensionale Datenräume in visuelle Darstellungen umzusetzen — ein Instrumentarium, das nicht erst für den Aufbau virtueller Realitäten erforderlich wurde, sondern inzwischen schon sowohl für die Interpretation umfangreicher Datensätze aus Messungen oder Simulationen als auch für die Präsentation der Ergebnisse moderner mehrdimensionaler Bildaufnahmeverfahren unverzichtbar geworden ist.

Ziele und Anwendungsgebiete

Abbildungen liefern Informationen über Realitäten. Durch den Abbildungsprozess, den unser Auge leistet, nehmen wir unsere Umgebung visuell wahr (genauer: wir nehmen den Ausschnitt unserer Umgebung wahr, den unser Auge erfassen kann – und wir nehmen wiederum nur diejenigen Qualitäten der Objekte der beobachteten Szene wahr, die Reize auf der Retina auslösen oder modulieren können). Damit werden unsere Augen zu Sensoren, mit denen wir unsere Umgebung ausmessen. Aus der Menge dieser ‘Messwerte’ konstruieren wir ein *mentales* Bild, technisch gesprochen ein Modell unserer Umgebung, das Grundlage für unsere Handlungsinitiative ist – das uns z.B. unsere Bewegungen so steuern lässt, dass wir Kollisionen und Stürze vermeiden. Visuelle Wahrnehmung ist also ein Funktionselement des Regelkreises, der unseren Handlungsmechanismen zugrunde liegt. Die Bilderfassung spielt darin die Rolle der Messtechnik, d.h. mittels Abbildung wird der ‘Istwert’ erfasst.

Die Techniken und Methoden der Computer-Visualistik ergänzen und erweitern dieses Schema. Sie erschließen damit neue Anwendungsfelder und Einsatzsituationen. Denn während unsere visuelle Wahrnehmung auf die sich



im sichtbaren Wellenlängenbereich abbildenden Objekteigenschaften in den optisch erfassbaren Größenbereichen beschränkt ist, liefert die Wahl anderer Wellenlängenbereiche (Infrarot, Röntgenstrahlung etc.) oder Abbildungsprinzipien (Projektion mit durchdringender Strahlung, Echoverfahren etc.) Einblicke in unzugängliche oder undurchdringliche Objekte und Ausblicke in unerreichbare Welten.

Prominentes Beispielfeld ist die Medizin: Die Röntgentechnik lieferte zunächst nur Schattenbilder, die jedoch bereits soviel neuen Einblick gaben, dass 'das Röntgen' seit langem als diagnostische Standardmethode etabliert ist. Hinzugekommen sind, ermöglicht durch den Einsatz moderner Informationstechnik, Verfahren für die vollständige (und sogar dynamische) Abbildung von Körperregionen in alle drei Ortsdimensionen, mit denen präzise Diagnosen gestellt werden können, die vormals nur invasiv zu gewinnen waren. Andererseits können mit Hilfe bildlicher Informationen über nicht einsehbare Körperbereiche chirurgische Eingriffe wesentlich gezielter und damit sicherer und schonender vorgenommen werden. Spezielle Bedeutung haben dabei Visualisierungsverfahren aus dem Computergrafikbereich bekommen, mit deren Hilfe die dreidimensionalen Bilddatenräume zu interpretierbaren Darstellungen transformiert werden.

In der industriellen Fertigung leisten neue Bilderfassungstechniken wertvolle Beiträge zur Qualitätskontrolle. So können Materialfehler in Gussstücken oder Schweißnähten zerstörungsfrei erkannt oder Maße und Materialeigenschaften an Werkstücken und Werkzeugen ohne physischen Eingriff in den laufenden Prozess überwacht werden.

Verarbeitungsmethoden für die primäre Bildinformation liefern einen weiteren Zugewinn: Unter Einbringung von Vorwissen oder Zusatzinformationen verhelfen sie zu einer — unter den bei der Erfassung der primären Bildinformation gegebenen Störeinflüssen und Beschränkungen — bestmöglichen Rekonstruktion der realen Situation. Ein spektakuläres Beispiel hierfür waren die ersten von Weltraumsonden gesendeten Nahaufnahmen der Mondoberfläche.

Der Prozess der Abbildung ist Gegenstand von Teil A¹. Er umfasst den vollständigen Pfad der Bilderstellung vom physikalischen Vorgang der primären Signalerfassung über die Umformung und Aufbereitung zu einem Bilddatensatz bis zu den Algorithmen zur Optimierung und Anpassung an den Anwendungszweck. Mathematische Modelle zur Beschreibung des Abbildungsprozesses sowie eine mehrdimensionale Systemtheorie zur Behandlung der Verarbeitungsvorgänge bilden das formale Grundgerüst.

Die *Bildanalyse* verdichtet die hochgradig detaillierte Information in Bildern zu relevanten 'Messdaten'. Sie fügt den *qualitativen* Aussagen, die ein Beobachter gewinnen kann, *quantitative* Aussagen hinzu. Bildanalyseverfahren, die eher qualitative Ergebnisse — im allgemeinen im Sinne einer Klassifizierung von Objekten, Details, Form, Struktur etc. — erzielen, werden häufig unter dem Begriff *Mustererkennung* geführt. Bildanalyse und Mustererkennung sind die Grundlage für Verfahren zur automatischen oder automatisierten Bildauswertung.

Auch bei der automatischen oder automatisierten Bildauswertung muss die medizinische Diagnostik wieder als prominentes Anwendungsfeld erhalten: Ohne dass morphologische oder funktionale Besonderheiten in einem für die Befundentdeckung bzw. Befundinterpretation angebotenen Bildmaterial quantifiziert werden, können Hypothesen über deren spezielle diagnostische Aussagekraft nicht validiert werden. Denn hierzu sind statistische Analysen über ein genügend großes Ensemble von ausgewerteten Fällen notwendig. Meist unverzichtbar ist eine vorgeschaltete automatische Mustererkennung zur Selektion der relevanten Details oder Strukturen im Bild. Mustererkennung und quantifizierende Analyse selektierter Bildinhalte sind auch die Grundlagen für eine automatische Material- oder Fertigungsfehlerkontrolle

1. Inhalt der Vorlesung „Digitale Bildverarbeitung I“ im Wintersemester

in industriellen Fertigungsprozessen sowie für eine situationsabhängige Steuerung von Fertigungsrobotern.

Bildverarbeitung in einem anderen Sinn war eine Voraussetzung um das von Weltraumsonden gelieferte Bildmaterial über astronomische Entfernungen zur Erde zu übertragen: Mit Methoden zur *Bilddatenkompression* konnten die enormen Datenvolumina der Bilder und Bildsequenzen mit Rücksicht auf die verfügbaren Kanalkapazitäten genügend weit reduziert werden, ohne dass relevante Information verloren gehen musste. Heute sind Bilddatenkompressionsverfahren standardisiert und unverzichtbar u.a. für das digitale Fernsehen, für Bildtelefone über ISDN-Kanäle und für Multimedia-dienste im Internet.

Der schrittweise Prozess der Informationsverdichtung ist Gegenstand von Teil B¹. Er umfasst Verfahren, Strategien und Operationen zur Extraktion von Merkmalen auf Signalebene, Gestaltebene und Objektebene, auf deren Basis inhaltsbezogenen Ordnungen geschaffen werden können. In diesem Teil wird auch eine kurze Übersicht über etablierte Ansätze der Bilddaten-Kompression gegeben, da hier — zwar mit unterschiedlichem Ziel — vergleichbare Strategien verfolgt werden.

Wiederum eine andere Rolle spielt die Computer-Visualistik in ihrem dritten Segment, den *Visualisierungsmethoden*. Hier geht es darum, die visuellen Wahrnehmungsstrategien zu nutzen, um komplexe situative oder funktionelle Zusammenhänge zu deuten. Indem umfangreiches mehrdimensionales Zahlenmaterial aus Messreihen, Simulationsexperimenten oder mathematisch-formalen Prozessen als Abtastwertegitter von Körpern, Farbflächen oder 'Landschaften' gedeutet wird und als Grundlage für die Synthese farbschattierter Bilder mit Raumsuggestion oder Stereoskopieeffekten dient, werden Korrelationen, systematische Verläufe und Beziehungen aufgedeckt,

1. Inhalt der Vorlesung „Digitale Bildverarbeitung II“ im Sommersemester

die sich in Zahlenmaterial schwer entschlüsseln und noch schwieriger interpretieren ließen. Von hier ist es nur ein kleiner Schritt zur Erzeugung vollständig synthetischer Visualisierungen — von biederen virtuellen Welten bis hin zu Kunstobjekten.¹

Bemerkenswert ist, dass 3D-Visualisierungs-Methoden auch benötigt werden, um die Ergebnisse höherdimensionaler Abbildungsprozesse verständlich wiederzugeben. So liefern die 3D-Rekonstruktionsverfahren (z.B. Röntgen- und Magnetresonanz-Computertomographie) Abbilder innerer Räume, für die uns Wahrnehmungserfahrungen aus unserer gewohnten visuellen Praxis fehlen. Während wir gelernt haben, die zweidimensionalen Bilder unserer Retina nach der räumlichen Konstellation opaker Körper, repräsentiert durch Teilbereiche ihrer Oberfläche aber ohne Einblicke in ihre innere Struktur zu deuten, leisten die genannten Abbildungsprozesse vollständige räumliche Abbilder strukturiert stoffgefüllter Objekte.

3D-grafische Kunstgriffe müssen angewandt werden, um hier einen “Durchblick” zu schaffen, d.h. die abgebildete Realität auf Ausschnitte, die für die Wahrnehmung weniger komplex sind, herunterzutransformieren und dennoch — z.B. durch eine dynamisch-interaktive Variation einzelner Darstellungsparameter — die angebotene Information vollständig zu nutzen. Hier greifen alle drei Teilgebiete der Computer-Visualistik ineinander — der Abbildungsprozess, eine nachgeschaltete Bildverarbeitung, die das abgebildete Objekt mit Hilfe von Mustererkennungsverfahren in hüllflächenbegrenzte Segmente zerlegt, und die für die Visualisierung erforderliche Bildsynthese. Im Verbund dehnen diese Verfahren unsere Beobachtungsräume aus, ergänzen unsere Wahrnehmungen und erweitern deren Verständnis.

1. Zu diesem Teilgebiet wird die Vorlesung „Computergrafik und 3D-Visualisierung“ von Prof. Dr. Klaus Tönnies als Blockveranstaltung im Sommersemester angeboten.

Teil A: Der Abbildungsprozess

Bilder sind oft wahrer als die Wirklichkeit
— Oskar Kokoschka

Das Bild: Verschlüsselung der Realität

Was ist ein 'Bild'? — "Sich ein Bild machen" heißt, Sinneseindrücke zusammensetzen zu einem Verständnis einer Situation. In diesem Sinne ist der Prozess "ein Bild zu machen" ein Zwischenschritt, der zu einer visuell rezipierbaren, meist nicht-flüchtigen Aufzeichnung einer Situation führt. Auch dieser Prozess ist ein Zusammensetzen von Informationen über ein Objekt oder über eine Szene, d.h., über eine Konstellation von Objekten. Die Grenzen der Informationsgewinnung reduzieren das Ergebnis dieses Prozesses zu einem Ausschnitt der Realität, der zudem durch die Gesetzmäßigkeit des Zusammensetzens verzerrt sein kann.

Das 'Einsammeln' von Informationsfragmenten und deren Zusammenbau zu einer visuell vermittelbaren Darstellung bezeichnen wir als *Abbildungsprozess*: *abbilden*, herstellen eines *Abbildes*. Der Abbildungsprozess setzt sich zusammen aus dem *Bildaufnahmeprozess*, der Gewinnung der Primärinformation, und dem *Bilderzeugungsprozess*, der Umformung und Umordnung der Primärinformationsfragmente zu einem Bild.

Alle diese Begriffe — Abbildung, Bildaufnahme, Bilderzeugung, insbesondere der Begriff Bild — sind unscharf und durch kontextabhängige umgangssprachliche Prägungen verwischt. Erst die genaue Betrachtung des jeweils zugrundeliegenden Prozesses wird zu einer präzisen Definition der Termini führen. So werden wir uns hier darauf festlegen, dass der Terminus "Bild" den Inhalt eines mehrdimensionalen, geordneten Datenraumes

bezeichnet: Wenn auch im umgangssprachlichen ein “Bild” etwas zweidimensionales meint (wohl, weil bei den am weitesten verbreiteten Abbildungsverfahren die drei Dimensionen der realen Welt auf die zwei Dimensionen des flachen Bildträgers reduziert werden), wollen wir hier auch z.B. das Ergebnis eines dreidimensionalen *Rekonstruktionsprozesses*, das in einem dreidimensionalen Datenraum aufgezeichnet ist, als Bild verstehen — auch wenn wir ein solches (Ab-)Bild erst nach weiteren Reduktionsprozessen visuell wahrnehmbar machen können. Diese aber fallen bereits in das Teilgebiet *Visualisierung*.

Den gesamten Prozess von der Erfassung der primären (physikalischen) Signalgrößen aus dem Objektraum bis zum Ablegen der zum Abbild aufbereiteten Information im Bilddatenraum bezeichnen wir als *Abbildungsprozess*, das zugrundeliegende Verfahren als *Abbildungsverfahren*, den formalen Vorgang als *Abbildung*. Zu beachten ist, dass — im Gegensatz zum Begriffsinhalt der mathematischen Abbildung — der Terminus Abbildung im Sinne der Bilderfassung auch alle Faktoren beinhaltet, die zu Informationsverlusten führen, hier die wichtigsten:

- Beschränkung auf die Erfassung ausgewählter Objekteigenschaften,
- Reduktion der Dimensionalität,
- Unschärfe der Messvorgänge in der Amplitude,
- Unschärfe der Messvorgänge in ihrer Ortszuordnung sowie
- Begrenztheit und Diskretisierung des Bildraumes.

Teil A befasst sich mit den Prinzipien, ein Abbild eines Objektes, einer Szene, kurz einer Realität herzustellen, mit den Techniken und Technologien der Bildaufnahme und mit dem Verfahren zur Erzeugung möglichst getreuer Abbilder des gewählten Realitätsausschnittes. Ein geeignetes methodisches Grundgerüst dient vor allem dazu, die unter den gegebenen situativen und technologischen Randbedingungen erreichbare Abbildungsqualität abzuschätzen und konstruktive Maßnahmen für ihre Optimierung zu finden.

Das Grundprinzip jedes Abbildungsprozesses ist ein zweistufiger Prozess:

1. Von einem Punkt außerhalb des abzubildenden Objektes oder der abzubildenden räumlichen Szene (*Objektraum*), werden Messungen vorgenommen, mittels derer *ortsselektiv* eine Materialeigenschaft oder Objektbeschaffenheit bestimmt wird.
2. Die Menge der Messwerte wird aus dem Objektraum in einen Datenraum, den *Bildraum* transformiert.

Vermeidbare und unvermeidbare Informationsverluste infolge der oben genannten Faktoren treten auf der ersten Stufe des Abbildungsprozesses auf. Sie sind durch das physikalische Prinzip, die technische Umsetzung und die realen Bedingungen der Erfassung der primären Messwerte bedingt.

Als Grundlage sowohl für den analytischen als auch für den konstruktiven Umgang mit diesen Faktoren werden in Abschnitt 1 zunächst allgemeine Grundprinzipien und formale Modelle für die wichtigsten Aspekte der Abbildungsgüte behandelt.

Diese Modelle sind auch eine wichtige Voraussetzung, um das *inverse Problem* — die Rückrechnung von der messtechnisch verfügbaren Information auf das abgebildete Objekt — zu lösen. Hierfür muss jedoch das Methoden inventar ergänzt werden: Ein geeignetes Werkzeug bietet die Erweiterung der klassischen Systemtheorie für höherdimensionale Signalmräume, Abschnitt 2.

In Abschnitt 3 werden dann beispielhaft verschiedene klassische Prinzipien der Bildgewinnung und ihre technologische Umsetzung beschrieben.

Die zweite Stufe ist ein Transformationsprozess, der im allgemeinen (abgesehen von Fehlern durch numerische Ungenauigkeiten wie Rundungsfehler, Interpolationsfehler etc.) umkehrbar ist. Informationsverluste auf der ersten Stufe können zu einem Teil kompensiert werden, indem auf der zweiten

Stufe Vorwissen über das Objekt, über die Eigenschaft des auf der ersten Stufe implementierten Verfahrens und über die physikalischen Randbedingungen in den Transformationsprozess einbezogen werden. Wir sprechen dann von einem *Rekonstruktionsprozess* oder von einem *Restaurationsprozess*.

Eine prominente Bedeutung für die Bilderzeugung hat die Rekonstruktion dreidimensionaler Abbildungen aus Projektionen gewonnen. Den zu Grunde liegenden Verfahren ist deshalb ein eigener Abschnitt 4 gewidmet.

Ziel einer Restauration ist es, unter Einbeziehung verfügbaren a-priori-Wissens das bestmögliche Abbild des interessierenden Objektes aus den primären Sensordaten herzustellen. Darüberhinausgehend kann das Bild auch an vorgegebenen Aufgabenstellungen bestmöglich angepasst werden (*Enhancement*). Geeignete Methoden werden in Abschnitt 5 behandelt, ebenso die Verfahren und Operationen für die Implementierung dieser Methoden.

Insbesondere die in den Abschnitten 1, 2 und 5 behandelten Methoden, Verfahren und Operationen sind Grundlagen, auf denen im Teil B „Bildanalyse“ weiter aufgebaut werden wird.

1 Abbildungsmodelle

Für die grundlegenden Eigenschaften des Abbildungsprozesses, d.h. für die letztlich erreichbare Abbildungsqualität sind primär das gewählte Abbildungsprinzip, die den sensorischen Effekten zu Grunde liegende Physik und die Technologie ihrer Realisierung verantwortlich. Um eine gegeben oder zu konzipierende Situation formal beschreiben zu können, werden zunächst allgemeine Grundprinzipien einer Abbildung behandelt. Sie betreffen die drei wichtigsten Aspekte der Abbildungsqualität:

- **Abbildungsgeometrie** — Transformation des Objektraums in den Bildraum (Abschnitt 1.1),
- **Kontrastauflösung** — Genauigkeit der Intensitätsbestimmung (Abschnitt 1.2) und
- **Ortsauflösung** — “Schärfe” der Abbildung (Abschnitt 1.3).

Für diese drei Aspekte des Abbildungsprozesses werden im folgenden formale Modelle aufgestellt. Sie sind ein Instrument für die Abschätzung der mit dem Abbildungsprozess verbundenen vermeidbaren und unvermeidbaren Informationsverluste in der Darstellung des abzubildenden Objektes oder der abzubildenden Szene. Sie sind damit auch Ausgangspunkt für konstruktive Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Darüber hinaus sind sie eine Grundlage für die Konzeption von Korrektur- und Kompensationsverfahren, die in Abschnitt 5 beschrieben werden.

1.1 Die ‘Abtastung’ des Objektraumes

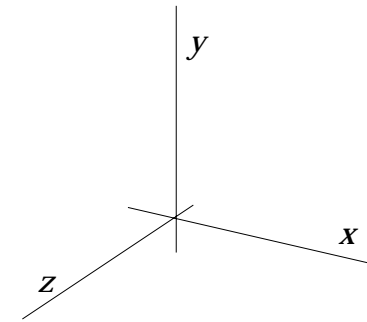
Der eigentliche Zweck einer Abbildung ist es, vom Abbild einen Rückschluss auf das Objekt oder die Szene vorzunehmen. An vorderster Stelle steht hier-

bei eine Zuordnung der Geometrie des Bildraumes zur Geometrie des Objektraumes. Eine formale Beschreibung ist grundsätzlich notwendig, wenn die Abbildung zur Orts- oder Abmessungsbestimmung im Objektraum dient. Sie kann hilfreich sein, wenn für die Lösung von Mustererkennungsaufgaben Objekte, Objektteile oder Objektbereiche auf der Basis von Formmerkmalen oder räumlichen Zuordnungen klassifiziert werden sollen.

1.1.1 Geometrisches Abbildungsmodell

Das mathematische Modell für die geometrischen Aspekte der Abbildung ist die *Euklidische Geometrie* auf einem dreidimensionalen Raum reeller Zahlen. Wir legen der Beschreibung geometrischer Strukturen im dreidimensionalen Raum ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde. Darin wird die Position eines Punktes durch die Koordinaten x , y und z festgelegt. Praktisch ist die Darstellung von Positionen durch Vektoren \vec{x} , Gl. (1-1).¹

In der Computergrafik wird für viele Aufgaben das Konzept der sog. *homogenen* Koordinaten angewendet: Den drei Koeffizienten des Positionsvektors wird als vierter Koeffizient eine beliebige Konstante $w \neq 0$ hinzugefügt, Gl. (1-2). Die Position des Punktes \vec{x} im kartesischen Raum ist weiterhin durch die Koordinaten x , y und z gegeben. Alle Vektoren mit identischen homogenen Koordinaten $\langle wx \ wy \ wz \ w \rangle^T$ aber variablem $w \neq 0$ bezeichnen dieselbe Raumposition. Im homogenen Koordinatensystem beschreibt dieser Vektor eine Gerade durch den Ursprung (mit Ausnahme des Ursprungs $w = 0$). Für die praktische Anwendung wird $w = 1$ gewählt, so



$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \langle x \ y \ z \rangle^T \tag{1-1}$$

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{Bmatrix} \tag{1-2}$$

1. Wir legen uns bei der Darstellung von Raumpositionen auf Spaltenvektoren fest. Im Text verwenden wir wenn nötig die zum Zeilenvektor transponierte Form. Für die Matrizenrechnung folgen wir der Konvention, Spaltenvektoren mit geschweiften Klammern, Zeilenvektoren mit spitzen Klammern und Matrizen in runden Klammern darzustellen. Felder in eckigen Klammern sollen Faltungskernen (siehe Seite 115) vorbehalten sein, um Verwechslungen vorzubeugen.

dass die drei ersten Koeffizienten des Vektors mit den karthesischen Koordinaten des Objektraumes identisch sind.

Der Vorteil dieses Konzeptes liegt darin begründet, dass geometrische Transformationen, bei denen Punkte im Unendlichen bezeichnet und manipuliert werden müssen, einfach beschrieben werden können: Für den Sonderfall $w = 0$ gilt, dass die bezeichnete Position auf einer Geraden durch den Ursprung des karthesischen Raumes mit der Richtung $[x\ y\ z]^T$ in unendlicher Entfernung vom Ursprung liegt.

Diese Eigenschaft ermöglicht es, geometrische Transformationen zwischen Räumen, in denen Punktpositionen durch homogene Koordinaten repräsentiert werden, kompakt und allgemein zu formulieren, auch wenn, wie häufig bei Abbildungsprozessen, unendlich ausgedehnte Objekträume in endlich ausgedehnte Bildräume, eventuell von niedrigerer Dimensionalität transformiert werden.

Seien \vec{x}_1 Punktpositionen im Objektraum und \vec{x}_2 die Positionen der korrespondierenden Punkte im Bildraum, dann kann eine allgemeine Transformationsvorschrift nach Gl. (1-3) formuliert werden. Darin ist (M) eine 4x4-Matrix.

Gl. (1-4) legt die Bezeichnungen der Koeffizienten der Transformationsmatrix (M) sowie der Ortsvektoren des Objektpunktes \vec{x}_1 und des korrespondierenden Bildpunktes \vec{x}_2 fest.

Die Koeffizienten der Transformationsmatrix lassen sich wie in Bild 1-1 dargestellt zu Gruppen zusammenfassen:

- der Faktor $1/s$ ist für eine isotrope Skalierung verantwortlich,
- der Spaltenvektor \vec{x}_0 beschreibt eine Translation,
- die 3x3-Matrix (r) bewirkt eine Rotation und
- der Zeilenvektor $\langle \frac{1}{d_x} \frac{1}{d_y} \frac{1}{d_z} \rangle$ beschreibt perspektivische Verzerrungen.

$$\vec{x}_2 = (M) \cdot \vec{x}_1 \quad (1-3)$$

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x_0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y_0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z_0 \\ \frac{1}{d_x} & \frac{1}{d_y} & \frac{1}{d_z} & \frac{1}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w \end{Bmatrix} \quad (1-4)$$

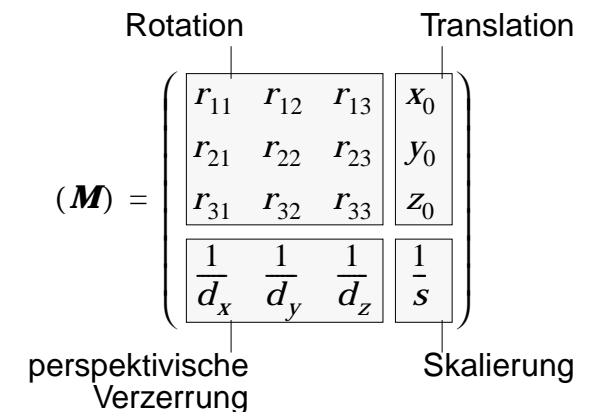


Bild 1-1

Mit den Verfahren der Matrizenrechnung können komplizierte Transformationen aus den Grundoperationen Translation, Skalierung etc. zusammengesetzt werden, die im einzelnen wie folgt wirken:

Skalierung

Der Koeffizient $1/s$ bewirkt eine isotrope Skalierung um den Faktor s .

Anisotrope Skalierung

Eine Dehnung oder Stauchung in nur eine Richtung wird durch die Diagonalkoeffizienten der Rotationsmatrix beschrieben (Beispiel $r_{33} < 1$, $r_{11} = r_{22} = 1$, übrige $r_{ij} = 0$: Stauchung in z -Richtung). So ergibt $r_{33} = 0$ die Abbildung aller Punkte des Objektraumes auf die xy -Ebenen $z=0$ ohne Einfluss auf ihre xy -Koordinaten, also eine *orthographische Parallelprojektion*, Gl. (1-5) und Bild 1-2.

Translation

Die Koeffizienten x_0 , y_0 und z_0 bewirken eine Verschiebung um den Verschiebungsvektor $\langle x_0 \ y_0 \ z_0 \rangle^T$.

Perspektivische Verzerrung

Die Koeffizienten $1/d_x$, $1/d_y$, $1/d_z$ bewirken eine entfernungsproportionale Stauchung (Beispiel $1/d_x = 1/d_y = 0$, $1/d_z > 0$: Stauchung in den xy -Koordinaten mit zunehmender Entfernung vom Ursprung in positive z -Richtung).

Rotation

Unter der einschränkenden Bedingung, dass die aus dem Koeffizienten r_{ij} gebildete 3×3 -Matrix orthogonal ist und ihre Determinante $\det[\mathbf{r}] = 1$ ist, bewirkt diese Untermatrix eine Rotation im Raum. Einfach nachzuvollziehen ist eine Rotation um eine der Koordinatenachsen: Bei einer Rotation um die x -Achse wirkt das Rotationsgesetz lediglich auf die y - und z -Koordinaten, Gl. (1-6).

$$\mathbf{M}_{\text{OP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

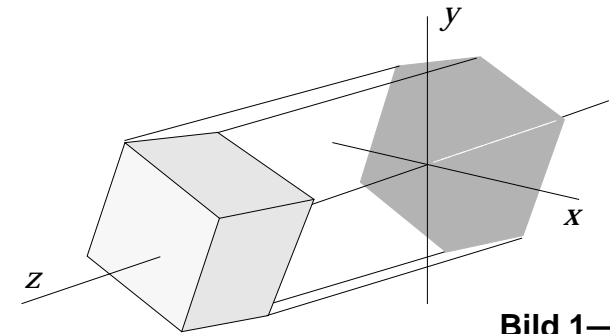


Bild 1-2

$$\mathbf{M}_{x\text{-Rotation}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

1 Abbildungsmodelle

1.1.2 Lochkamera

Abbildungssysteme mit wohl der weitesten Verbreitung sind Linsensystemen, mit denen eine dreidimensionale Szene auf einem Flächensensor abgebildet wird. Für die Strahlengeometrie gilt das Prinzip der Lochkamera.

Ist der Flächensensor eben, dann ergibt als Transformationsgesetz eine *perspektivische Projektion*, d.h. eine Kombination aus einer perspektivischen Verzerrung und einer Stauchung zu einer Projektion auf die Bildebene. Gl. (1-7) beschreibt das Transformationsgesetz, wenn das Zentrum der Optik (Loch der Lochkamera) im Ursprung und die Bildebene parallel zur xy -Ebene im Abstand $z = d$ angeordnet ist (Bild 1-3).

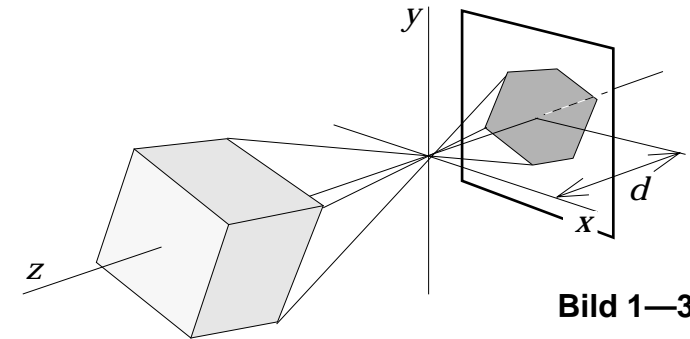
1.1.3 Zentralprojektion

Abbildungsverfahren, bei denen die Szene von Strahlung, die von einer punktförmigen Quelle ausgeht, durchdrungen wird, und ein Flächensensor detektiert, in welchem Maße die Szene die Strahlung geschwächt hat — das klassische Röntgenbildverfahren —, gehorchen dem Abbildungsgesetz einer *Zentralprojektion*, Bild 1-4.

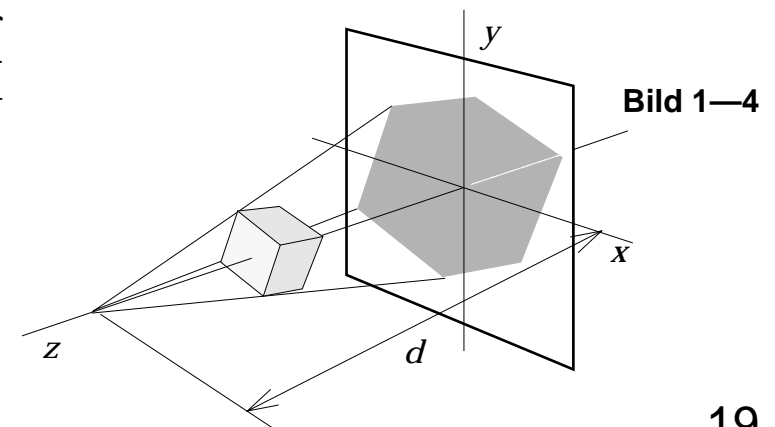
Wenn der Flächensensor wiederum eben ist, besteht das Transformationsgesetz ähnlich dem der Lochkamera aus der Kombination einer perspektivischen Verzerrung und einer Stauchung in Richtung der Normalen auf der Sensorfläche. Gl. (1-8) gibt das Transformationsgesetz an, wenn die Sensorfläche in der xy -Ebene und das Strahlenzentrum im Abstand d auf der z -Achse liegen.

1.1 Die 'Abtastung' des Objektraumes

$$M_{PP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{pmatrix} \quad (1-7)$$



$$M_{PP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{pmatrix} \quad (1-8)$$



1.1.4 Rekonstruktion der Objektposition

Bei allen projektiven Abbildungen wie Lochkameraprinzip oder Zentralprojektion geht eine Raumkoordinate der abgebildeten Objektpunkte verloren. Der Bildpunktvektor liefert, da er lediglich Punkte in einer Ebene beschreibt, nur die zweidimensionale Aussage, dass der mit einem Bildpunkt korrespondierende Objektpunkt auf einer Geraden liegt. Die Gerade ist durch den Bildpunkt und das Abbildungszentrum festgelegt. Im Falle der Lochkamera ist die Geradengleichung durch Gl. (1-9) in Parameterform gegeben, Bild 1—5.

Können singuläre Punkte im Bild identifiziert werden, dann reicht die Abbildung mit einer zweiten Lochkamera oder durch eine zweite Projektion aus, um die Raumposition des korrespondierenden Objektpunktes zu bestimmen, indem der Schnittpunkt mit der zweiten sich ergebenden Geradengleichung ermittelt wird. Ein geeigneter Analyseansatz basiert auf der *Epipolarlinien*-Geometrie. Dieses Verfahren wird zur Raumkoordinatenmessung verwandt, wenn punktförmige Lichtquellen eingesetzt werden können und weitere Beleuchtungseffekte ausgeblendet werden können. Im weitesten Sinne liegt dieses Prinzip der Korrespondenzanalyse des stereoskopischen Sehens zugrunde.

Ein anderes Verfahren, um ohne eine zweite Abbildung die fehlenden Informationen zurückzugewinnen, besteht darin, die Szene *strukturiert* zu beleuchten. Im einfachsten Fall wird die Szene mit einem punktförmig abgeblendeten Lichtstrahl (z.B. Laserstrahl) abgetastet. Die Abbildung des durch diesen Strahl beleuchteten Objektoberflächenpunktes liefert wieder eine Geradengleichung. Gesucht wird nun der Schnittpunkt mit der den Beleuchtungsstrahl beschreibenden Geradengleichung. Dieses Prinzip kann ausgeweitet werden, indem die Szene mit definierten Beleuchtungsmustern angestrahlt wird.

$$\hat{\mathbf{x}}_1(u) = u \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (1-9)$$

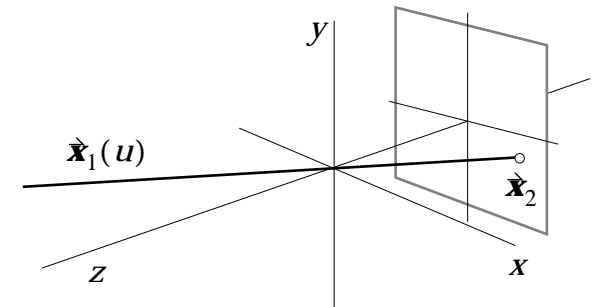


Bild 1—5

1.2 Unschärfe der Intensitätsmessung

Im vorangehenden Abschnitt wurde die Abtastung des Objektraumes aus geometrischer Sicht behandelt. Für eine formale Beschreibung wurden Gesetzmäßigkeiten zwischen den *Positionen* korrespondierender Punkte im Objektraum und im Bildraum formuliert. Zweck einer Abbildung ist es aber, die auf einer Objektposition vorliegende *Größe* der mit dem Abbildungssystem zu erfassenden Materialeigenschaft oder Objektbeschaffenheit quantitativ zu ermitteln und der korrespondierenden Position im Bildraum zuzordnen. Dies ist als ein punktuell wirkender (Fern-)Messvorgang zu betrachten, der — wie jeder Messvorgang — mit einer Messunsicherheit behaftet ist. Im folgenden werden die physikalischen Ursachen nichtreproduzierbarer Einflüsse im Intensitätsbereich des Abbildungsvorgangs behandelt und formalisiert.

Nun kann ein Messsignal, dessen Amplitude die abzubildende Objekteigenschaft repräsentieren soll, nur von einem endlich ausgedehnten Volumen- oder Oberflächenelement abgeleitet werden. Endliche Ausdehnung ist allein schon notwendig, weil die Quelle einer endlichen Signalenergie nicht in einem Punkt konzentriert sein kann. Andererseits ist es auch physikalisch unmöglich, den Objektraum mit einem auf eine Linie reduzierten Strahl abzutasten bzw. Sensoren mit einer auf einen Punkt reduzierten Rezeptorfläche zu realisieren.¹ Für die folgenden Betrachtungen wird daher ein ortsdiskreter, endlich ausgedehnter Sensor mit quadratischen Detektorelementen der Kantenlänge Δx (Bild 1—6), deren Signalwerte jeweils die Pixelwerte des diskreten Bildrasters liefern, angenommen. Auf die Sensorfläche sei das Objekt mittels Zentralprojektionen abgebildet. Die von einem Detektorelement registrierte Messgröße kann sowohl die von einer punktförmigen Strahlenquelle durch das Objekt transmittierte und dabei den örtlichen Objekteigenschaften entsprechend geschwächte Strahlung als auch die an

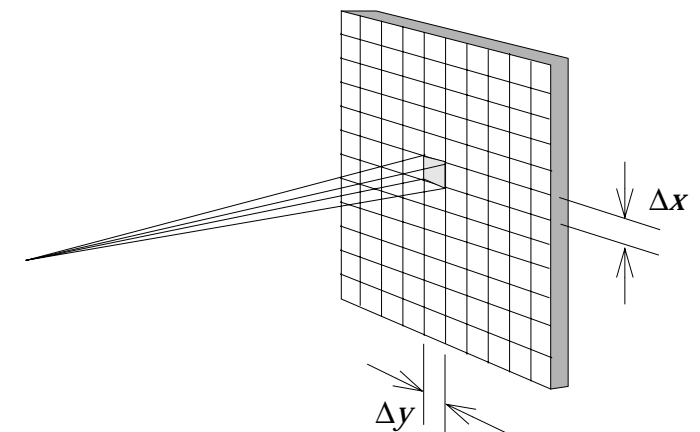


Bild 1—6

1. Eine Modellbeschreibung für die Unschärfe der Ortsfunktion wird in Abschnitt 1.3 entwickelt.

den Objektoberflächen reflektierte und mittels einer im Zentralpunkt angeordneten Optik auf den Sensor projizierte Strahlung sein. Der erste Fall entspricht der Schattenbilderzeugung mit Röntgenstrahlen, der zweite der optischen Abbildung nach dem Kameraprinzip.

1.2.1 Rauschquellen begrenzen die Kontrastauflösung

Ein Bild soll einen Rückschluss auf die abgebildete Szene oder das abgebildete Objekt ermöglichen: Aus den lokalen Funktionswerten der abgebildeten Größe — den von den Detektorelementen gelieferten Signalen, den 'Messwerten' — soll eine Aussage über das Vorhandensein eines Objektes, über dessen Berandung oder über den örtlichen Funktionsverlauf der abgebildeten Objekteigenschaft abgeleitet werden. Für die Aussagekraft der Messwerte ist die kleinste reproduzierbar unterscheidbare Signalstufe bezogen auf den Gesamtbereich des Messsignals ein Maß.

Verantwortlich für nicht-reproduzierbare, also stochastische Signalanteile sind *Zufallsprozesse*. Die vorliegende Signalkette (Bild 1—7) weist drei wesentliche Quellen für Störungen durch Zufallsprozesse auf:

- Quanten- oder Photonenrauschen im Signalerfassungsbereich,
- thermisches Rauschen im analogen Bereich der Signalverarbeitung,
- Quantisierungsrauschen durch die Analog/Digital-Wandlung.

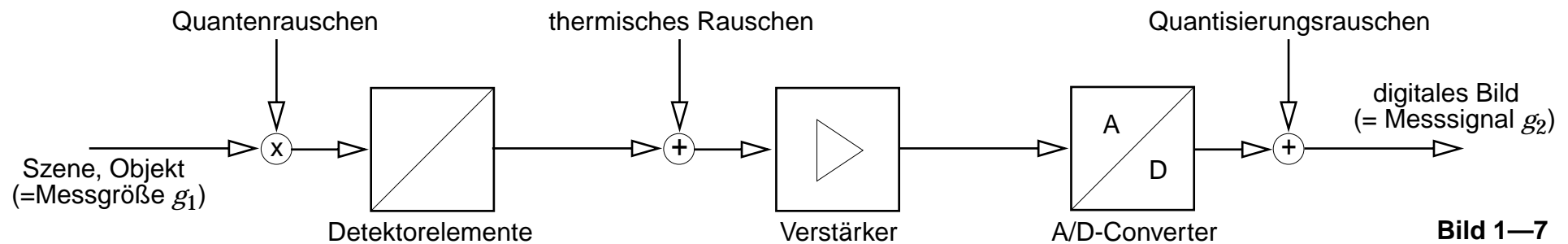


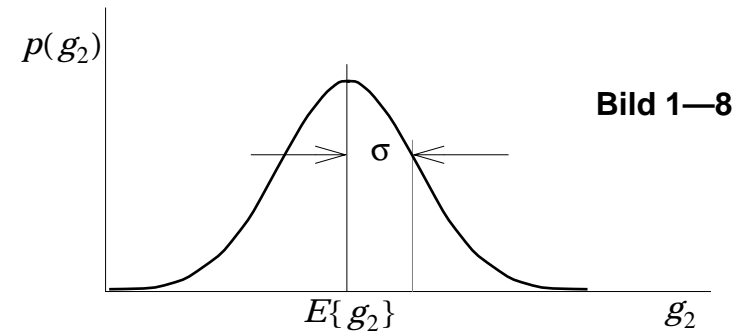
Bild 1—7

Die Wirkung einer Rauschquelle auf ein Messsignal kann als Addition einer Zufallsgröße betrachtet werden. In vielen Fällen können stochastische Störsignale durch die Dichtefunktion einer *Normalverteilung*, der *Gauß-Funktion* Gl. (1-10) approximiert werden, Bild 1—8. Darin ist $E\{g_2\}$ die *Erwartung*, d.h. der Wert, den das Messsignal ohne überlagertes Störsignal annehmen würde. Die Erwartung kann durch *Mittelung* \tilde{g}_2 vieler Messungen unter gleichbleibenden Bedingungen ermittelt werden. Sie ist damit gleichzusetzen mit der das abzubildende Objekt beschreibenden Größe g_1 , Gl. (1-11). Die Erwartung ist das erste Moment der Verteilungsdichtefunktion.

Das zweite zentrale Moment ist die *Dispersion* $D\{g_2\}$, auch *Varianz* genannt. Sie ist definiert als Erwartung der quadratischen Abweichung, Gl. (1-12), kann also als Leistung des überlagerten Störsignals interpretiert werden. In der grafischen Darstellung stellt die *Standardabweichung* σ , d.h. die Wurzel aus der Varianz (engl.: *root-mean-square*, rms) den Maßstabsfaktor für die amplitudenmäßige Streuung der Messergebnisse dar.

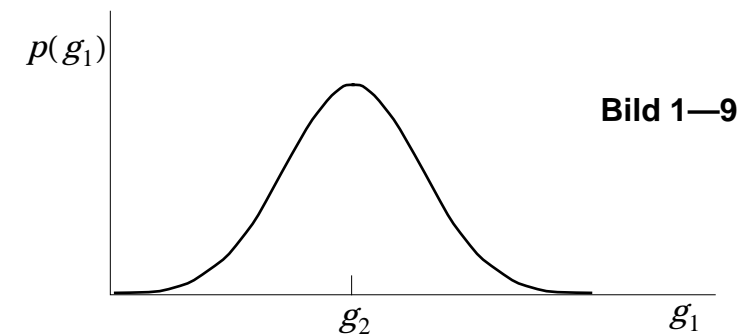
Die Wirkung der Rauschquelle liegt nun darin, dass aus dem Messsignal nur *unscharf* auf die Messgröße — hier die abgebildete Objekteigenschaft am Ort $\langle x \ y \ z \rangle^T$ — zurückgeschlossen werden kann. Wiederum muss das *inverse Problem* gelöst werden, d.h., ermittelt werden muss, welchen Rückschluss das aktuelle Messsignal g_2 auf die Objektfunktion g_1 zulässt, Gl. (1-13). Dazu muss die Verteilungsdichtefunktion für g_1 bei Vorliegen eines Messsignals g_2 aufgestellt werden, Bild 1—9. Bei einer Normalverteilung ist deren Verlauf aus Symmetriegründen identisch mit dem Verlauf von $p(g_2)$. Das heißt, wenn weder a-priori-Wissen noch Zusatzinformation vorliegen, ist die beste *Schätzung* für die Messgröße g_1 — die Erwartung — der aktuelle Messwert g_2 . Die seitliche Ausdehnung der Kurve, skaliert durch σ , ist ein Maß für die Unschärfe der Amplitudenmessung — anders ausgedrückt, für die Unzuverlässigkeit der Schätzung.

$$p(g_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(g_2 - E\{g_2\})^2}{2\sigma^2}} \quad (1-10)$$



$$E\{g_2\} = \tilde{g}_2 = g_1 \quad (1-11)$$

$$\sigma^2 = D\{g_2\} = E\{(g_2 - E\{g_2\})^2\} \quad (1-12)$$



$$g_1 = f(g_2, \sigma) \quad (1-13)$$

Wird einer uniformen Szene $g_1(x,y)=\text{const}$ ein Rauschsignal überlagert, ergibt sich eine zweidimensionale Zufallsverteilung: In Bild 1—10 sind einem homogenen mittleren Grauwert Rauschsignale mit unterschiedlichem σ additiv hinzugefügt. Von der Standardabweichung σ des Rauschsignals hängt nun offensichtlich ab, wie groß der Helligkeitsunterschied eines Objektes g_O zum Hintergrund g_H mindestens sein muss, damit das Objekt entdeckt werden kann.

Helligkeitsunterschiede zwischen voneinander abgrenzbaren Partitionen einer Szene nennen wir *Kontrast* C , definiert nach DIN 6814/22 gemäß Gl. (1-14). Der Grenzkontrast C_{\min} ist von der Standardabweichung σ , d.h. von der Amplitudenunschärfe des Abbildungsprozesses abhängig. Ein Detektionsexperiment, auf das viele reale Situationen zurückgeführt werden können, wird von Rose¹ beschrieben. Zu entdecken sind vor einem uniformen Hintergrund Objekte, deren Abbildung (z.B. als Projektion auf einen ebenen diskreten Flächendetektor) gerade die Fläche eines Bildelementes ("pixel") einnimmt, Bild 1—11. Zu bestimmen ist die Entdeckungsschwelle, d.h. der Kontrast C_{\min} , mit dem ein Objekt bei gegebenem Störsignal noch vom Hintergrund unterscheidbar ist — oder formuliert als Entwurfsaufgabe: Wie weit müssen stochastische Einflüsse reduziert werden, damit die gewünschte Objektentdeckungsaufgabe erfüllt werden kann?

Unter der Annahme, dass die Zahl der zu entdeckenden 1-Pixel-großen Objekte sehr klein gegenüber der Pixelzahl des Gesamtbildes ist, kann die Erwartung für die Hintergrundamplitude $E\{g_H\}$ durch Mittelwertbildung ermittelt werden. Eine Entscheidungsschwelle g_S für eine Objekt/Hintergrund-Entscheidung kann nun so festgelegt werden, dass die Anzahl der falsch-positiven Entscheidungen akzeptabel niedrig ist (Fläche unter $p(g_H)$ für $g_2 > g_S$). "Akzeptabel niedrig" muss bezogen werden auf das Verhältnis der Anzahl erwarteter Objekte zu Hintergrund-Pixeln, hier also näherungs-

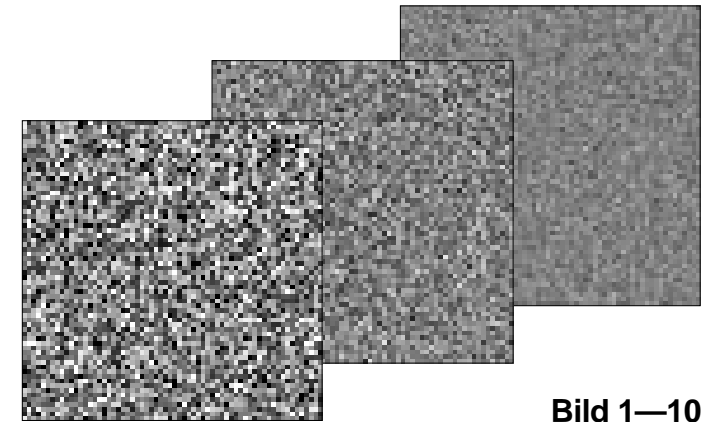


Bild 1—10

$$C = \frac{g_O - g_H}{g_H} = \frac{g_O}{g_H} - 1 \quad (1-14)$$

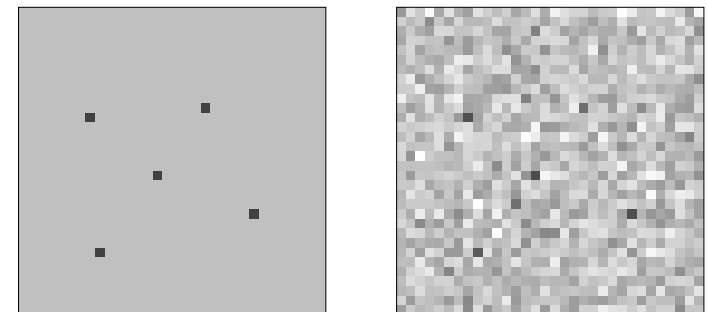
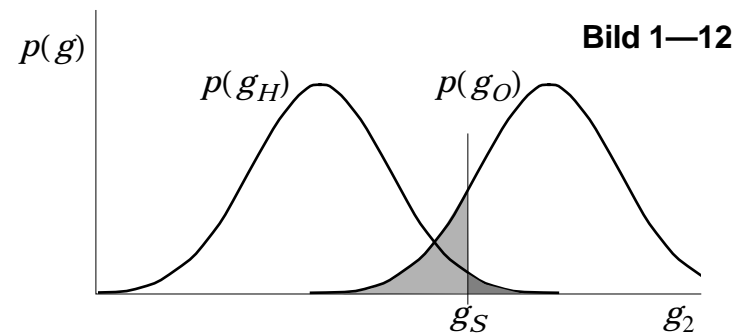


Bild 1—11

1. Rose A: Vision — Human and Electronic, Plenum Press, New York 1973

weise zur Gesamtzahl der Pixel. Die Erwartung für die Amplitude eines Objektes $E\{g_O\}$, Gl. (1-15) muss nun soweit über der Schwelle liegen, dass wiederum die Anzahl der falsch-negativen Entscheidungen, also der nicht-erkannten Objekte niedrig genug ist (Fläche unter $p(g_O)$ für $g_2 < g_S$), Bild 1-12.

Sinnvolle Abbildungssituationen werden unter dieser Betrachtungsweise immer verlangen, dass die Standardabweichung σ ein Bruchteil $1/k$ der gewünschten Amplitudendifferenz für gerade noch entdeckbare Objekte ist. Der Grenzkontrast C_{\min} wird damit das k -fache der Standardabweichung. Ist der überlagerte stochastische Prozess additiv und unabhängig von der Amplitude des gestörten Signals, dann wird der Grenzkontrast üblicherweise auf den nutzbaren Signalamplitudenbereich ($g_{\max} - g_{\min}$) bezogen, Gl. (1-16). Eine angemessene Größenordnung ist $k = 5$, wie im folgenden Zahlenbeispiel gezeigt wird.



$$E\{g_O\} = E\{g_H\} \cdot (1 + C_{\min}) \quad (1-15)$$

$$C_{\min} = \frac{k \cdot \sigma}{g_{\max} - g_{\min}} \quad (1-16)$$

Bei einem Detektorarray von $100 \cdot 100 = 10^4$ Pixeln und einer erwarteten Anzahl von fünf Objekten ergibt eine Entscheidungsschwelle bei $g_S = (E\{g_H\} + 4\sigma)$ eine Erwartung von 0,3 falsch-positiven Entscheidungen, d.h. *scheinbaren* Objekten (Tabelle 1-1 gibt Lösungen des *gaußschen Fehlerintegrals*, d.h. die Restfläche unter $p(g_H)$ bezogen auf die Gesamtfläche, an). Liegt die Erwartung für die Amplitude der zu entdeckenden Objekte um ca. ein weiteres σ über dem Schwellwert, also $E\{g_O\} = (E\{g_H\} + 5\sigma)$, würden bei fünf erwarteten Objekten (eines pro 2.000 Pixel) 0,8 Objekte nicht entdeckt werden. Insgesamt sind also nur ca. 1,1 Fehlentscheidungen zu erwarten.¹

Tabelle 1-1

k	$\int_{E\{g_2\} + k \cdot \sigma}^{\infty} p(g_2) dg_2$
1	$\approx 0,16$
2	$\approx 0,023$
3	$\approx 1,3 \cdot 10^{-3}$
4	$\approx 3 \cdot 10^{-5}$
5	$\approx 3 \cdot 10^{-7}$
6	$\approx 2 \cdot 10^{-9}$

1.2.2 Die Relation von Objektgröße und Grenzkontrast

Um die Abhängigkeit des Grenzkontrastes für die Objektentdeckung von der relativen Größe des Objektes zu finden, wird folgende Situation betrachtet:

1. Diese Annahme wird auch durch die *Bayes-Entscheidungsregel* bestätigt, die die Gesamtzahl der Fehlentscheidungen minimiert, siehe Abschnitt 8.3.2 Seite 201.

Die Abbildung des zu entdeckenden quadratischen Objektes habe die Ausdehnung von genau i Pixeln. Da dies bekannt ist, können Messwertmittelwerte über quadratische Felder von jeweils i^2 Pixeln gebildet werden. Der Gewinn liegt nun darin, dass bei einer Addition von i^2 Messwerten der Nutzsignalanteil die i^2 -fache Amplitude annimmt, die Nutzsignalleistung also auf das i^4 -fache anwächst, die Störsignalleistung — die Rauschleistung — sich aber nur i^2 -fach erhöht. Relativ verringert sich die Varianz der gemittelten Messergebnisse reziprok zur Anzahl der jeweils zusammengefassten Pixel, Gl. (1-17). Die Standardabweichung vermindert sich damit reziprok zur linearen Ausdehnung i des Objektes, Gl. (1-18). Für die Entdeckungsgrenze ist also bei gegebener Standardabweichung das Produkt aus linearer Objektmaßung und Grenzkontrast *konstant*!

Dies wird auch durch das so genannte C/Δ -Experiment bestätigt: Versuchspersonen werden Anordnungen von kreisförmigen Objekten von abgestuftem Durchmesser und abgestuftem Kontrast wie in Bild 1—13 dargestellt, vorgelegt. Als Grenze zwischen entdeckten und nicht entdeckten Objekten wird näherungsweise die Diagonale gefunden, wenn die Abstufung in konstanter relativer Schrittweite erfolgt (in Bild 1—13 werden Durchmesser und Kontrast jeweils halbiert).

1.2.3 Quantenrauschen: die ultimative Abbildungsgrenze

Für den Entwurf eines Abbildungssystems stellt sich nun die Frage, welche Mittel wir in der Hand haben, um die gewünschte Kontrastauflösung zu erreichen. Beginnen wir am Ende der Kette der in Bild 1—7 auf Seite 22 zusammengestellten Rauschquellen:

- Das *Quantisierungsrauschen*, das durch die Zuordnung der Amplitudenwerte zu diskreten Amplitudenstufen im Analog/Digital-Converter verursacht wird, kann im allgemeinen durch geeignete Wahl der Quantisierungsstufenzahl unter der geforderten Grenze gehalten werden.

$$D\{\bar{g}_2\} = D\{g_2\} \cdot \frac{1}{i^2} \quad (1-17)$$

$$\sigma(\bar{g}_2) = \sqrt{D\{\bar{g}_2\}} = \sigma(g_2) \cdot \frac{1}{i} \quad (1-18)$$

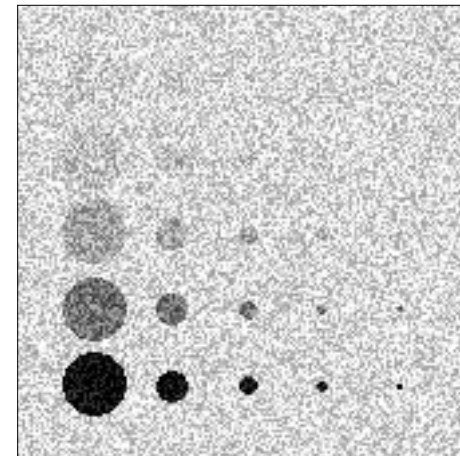


Bild 1—13

Aus dem Quantisierungsintervall Δg ergibt sich nach Gl. (1-19) die Rauschleistung P_q . Bezüglich des Zusammenhangs zwischen Rauschleistung und Standardabweichung siehe Gl. (1-28) auf Seite 29.

$$P_q = \frac{\Delta g^2}{12} \quad (1-19)$$

- *Thermisches Rauschen* des Sensors und der analogen Signalkette zu beherrschen, ist bereits aufwendiger: Wenn die technologischen Möglichkeiten (rauscharme Bauelemente und Schaltungskonzepte) erschöpft sind, hilft die Herabsetzung der Temperatur des Sensors bzw. des Detektorarrays und der Vorverstärkenstufen weiter.
- Das *Quantenrauschen* schließlich ist allein von der Ergiebigkeit der Beleuchtungsquelle, der Strahlungsschwächung auf dem Weg bis zum Sensor und der Effizienz der Umsetzung in ein elektrisches Signal abhängig. Grenzen, die hier aus physikalischen Gründen oder Verträglichkeitsaspekten (medizinische Röntgentechnik!) gesetzt sind, bestimmen letztlich die mit einem Bildaufnahmesystem erreichbare Abbildungsqualität. Der Quanten- oder Photonenrauschprozess soll deswegen im folgenden analysiert werden.

Bei Bildaufnahmeverfahren, die mit Licht oder kurzwelligerer Strahlung (γ -Strahlen, Röntgenstrahlen) arbeiten, liegt die Ursache für die Unschärfe der Intensitätsbestimmung des Strahlenanteils, der auf die Fläche eines Detektorelementes fällt, in der diskreten Natur der Strahlung. Die Abstrahlung von Photonen oder energiereichen Quanten (Röntgenstrahler) kann als Zufallsprozess verstanden und mittels einer Binomialverteilung beschrieben werden, Gl. (1-20): p_n ist die Erwartung, dass von N in einem Messzeitintervall emittierten Quanten n Quanten so abgesandt werden, dass sie das betrachtete Detektorelement treffen können. p ist die arithmetische Erwartung, bei konstanter Quantenflussdichte φ also das Verhältnis der Fläche eines einzelnen Detektorelements zum Gesamtquerschnitt des Strahlenfeldes. In der Praxis ist $p \ll 1$.

$$p_n^{(N)} = \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n} \quad (1-20)$$

Objektabhängige Streu- und/oder Absorptionsprozesse auf dem Weg eines Quants von der Quelle zum Detektor können als weitere *unabhängige*

Zufallsprozesse aufgefasst werden. Ebenso stellt wiederum die Auslösung eines Signalimpulses durch ein das betrachtete Detektorelement treffendes Quant einen *unabhängigen* Zufallsprozess dar.

Für große N und n erhält man mit Hilfe der *Stirlingschen* Formel eine Näherung, die formal mit einer Normalverteilung übereinstimmt, Gl. (1-21)¹. Das erste Moment ist durch Gl. (1-22) und das zweite zentrale Moment durch Gl. (1-23) festgelegt. Für die Standardabweichung gilt Gl. (1-24). Damit kann bei den hier betrachteten großen mittleren Quantenzahlen die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung durch die Dichtefunktion einer Normalverteilung approximiert werden, deren Varianz D gleich der Erwartung E ist!

Die für die Standardabweichung σ entscheidende Größe ist also die Erwartung für die Anzahl der "effektiven Quanten", d.h. derjenigen Quanten, die einen Beitrag zum Signal eines Detektorelements leisten. Diese Zahl wird bestimmt durch

- die Quantenfluenz ϕ (Quantenflussdichte ϕ pro Messzeitintervall) des Strahlers gemessen in der Ebene des Detektors,
- den Schwächungsfaktor μ , der durch das Objekt verursacht wird (der gewünschte Messeffekt!),
- die Fläche eines Detektorelements $\Delta x \cdot \Delta y$ und
- den Effizienzfaktor η des Detektors.

Aus diesen Größen lässt sich nach Gl. (1-25) das Signal g_2 definieren. Damit sind auch die Erwartung für den lokalen Messwert Gl. (1-26) und die Standardabweichung Gl. (1-27) gegeben.

Wird das Ergebnis dieses Zufallsprozesses als Signal gedeutet, können die Erwartung als Nutzsignal und die zufälligen Abweichungen als Störsignal

$$P_n^{(N)} \approx \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(n-Np)^2}{2\sigma^2}} \quad (1-21)$$

$$E\{n\} = \hat{n} = N \cdot p \quad (1-22)$$

$$D\{n\} = \sigma_n^2 = N \cdot p(1-p)$$

$$\sigma_n^2 \approx N \cdot p = E\{n\} \quad (1-23)$$

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)} \approx \sqrt{Np} \quad (1-24)$$

$$g_2(\vec{x}) = \mu \cdot \eta \cdot \phi \cdot \Delta x^2 \quad (1-25)$$

$$E\{g_1(\vec{x})\} = g_2(\vec{x}) \quad (1-26)$$

$$\sigma = \sqrt{g_2(\vec{x})} \quad (1-27)$$

1. Bronstein IN und Semendjajew KA:
Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harry Deutsch 1965

(“Rauschen”) aufgefasst werden. In der Signaltheorie ist es üblich, als Bewertung für die Signalqualität das Verhältnis von (Nutz-)*Signalleistung* zu *Rauschleistung* anzugeben, das SNR (*signal-to-noise ratio*). Als Leistung eines überlagerten Zufallsprozesses kann die in der Abweichung vom Erwartungswert verkörperte Energie pro Messzeitintervall interpretiert werden, also die Erwartung des Fehlerquadrats Gl. (1-28), in der Terminologie der Statistik die Varianz oder Dispersion D nach Gl. (1-12) auf Seite 23. Für Photonen- oder Quantenrauschen ergibt sich daraus mit Gl. (1-27) eine lineare Abhängigkeit des SNR von der mittleren Signalamplitude, Gl. (1-29)!

$$P_n = (g_2 - \hat{g}_2)^2 = D = \sigma^2 \quad (1-28)$$

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{g_2^2}{g_2} = g_2 \quad (1-29)$$

1.3 Unschärfe der Ortszuordnung

Auf ihrem Weg vom Objekt zum Bildsensor wird das abbildende Strahlen- oder Wellenfeld durch unterschiedliche Effekte so beeinflusst, dass Objektkanten, Linen- oder Punktstrukturen zerfließen, d.h. “unscharf” abgebildet werden (Bild 1—14: rechts das unscharfe Abbild des linken Objektes). Verursacht werden kann die Unschärfe bei optischen Systemen durch Linsenfehler (die Auflösungsgrenze einer Optik ist durch ihre so genannte numerische Apertur gegeben), bei Projektionsverfahren durch die Ausdehnung der Strahlenquelle. Weitere Ursachen für Unschärfe können laterale Diffusionsprozesse sein, z.B. wenn als Detektor ein Film oder die Photoleiterschicht eines Vidicons eingesetzt wird, oder wenn einem Röntgendetektor eine Szintillatorplatte vorgeschaltet ist. Gesucht ist nun ein Modell Gl. (1-30) für die formale Beschreibung der Veränderung, die eine zweidimensionale Signalfunktion $g_1(\vec{x}_1)$ am Eingang eines Übertragungssystems $h(\vec{x}_1)$ nach der Passage dieses Systems erfahren hat. Das System kann ein Bildsensor oder ein weiteres Glied einer Bildverarbeitungskette sein, Bild 1—15.

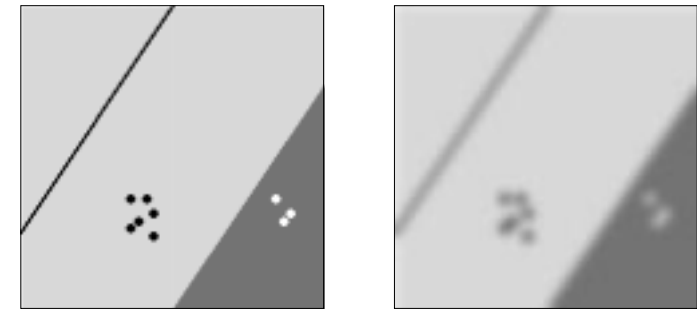


Bild 1—14

$$g_2(\vec{x}) = f[g_1(\vec{x}), h(\vec{x})] \quad (1-30)$$

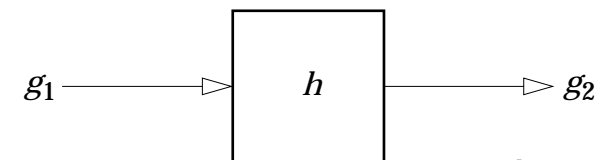


Bild 1—15

Wie in der Nachrichtentechnik, wo die Impulsantwort als generelle Beschreibung für lineare *zeitinvariante* Systeme (Signalwandler, Filter, Übertragungskanäle etc.) dient, findet dieser Ansatz auch in der Bildverarbeitung allgemeine Anwendung, so z.B. auch für die Beschreibung von Filtern, mit denen Bildsignalfunktionen in gezielter Weise beeinflusst werden sollen (siehe Abschnitt 5.4.1 ab Seite 110). Da dieser Ansatz zuerst für die Beschreibung der "Unschärfe" abbildender Systeme formuliert wurde, wobei als Entsprechung der Impulsantwort das Auseinanderlaufen eines "scharfen" Punktes gesehen werden kann, wird die ein LSI-Übertragungssystem im Ortsbereich beschreibende zwei- oder höherdimensionale Impulsantwort "Point Spread Function" (PSF) genannt.

1.3.1 Die "Point Spread Function" — PSF

Um gleich auf die für die praktische Anwendung in digitalen Systemen interessierende *diskrete* Beschreibung zuzusteuern, setzen wir voraus, dass die zu behandelnden Signalfunktionen durch eine abzählbare Menge 2-dimensional äquidistanter *Abtastwerte* ("samples") vollständig beschrieben werden können. Die Voraussetzung dafür, die Erfüllung des *Abtasttheorems*, wird in Abschnitt 2.5.2 ab Seite 52 behandelt werden.

Weiter werden wir den folgenden Betrachtungen zugrundelegen, dass ein numerischer Abtastwert den *Mittelwert* der Signalfunktion in einem Flächenelement $\Delta x \cdot \Delta y$, dem *Pixel*, repräsentiert, das von der Position seiner diskreten Koordinaten m, n in positiver Koordinatenrichtung zu den Nachbarn aufgespannt wird, Bild 1—16. Die Mittelwertbildung ist eine Näherung an die theoretische Abtastfunktion. Sie ist jedoch eine physikalisch sinnvolle Annahme, da, wie schon auf Seite 21 erwähnt, endliche Signalenergien nur von endlich ausgedehnten Detektorflächen empfangen werden können. (Praktisch sind diskrete Bildsensoren auch in dieser Weise strukturiert, z.B. CCD-Kamerachips, siehe Seite 63) Die diskreten Koordinaten m, n werden im folgenden nach Gl. (1–31) aus den kontinuierlichen Koordinaten x, y abgeleitet.

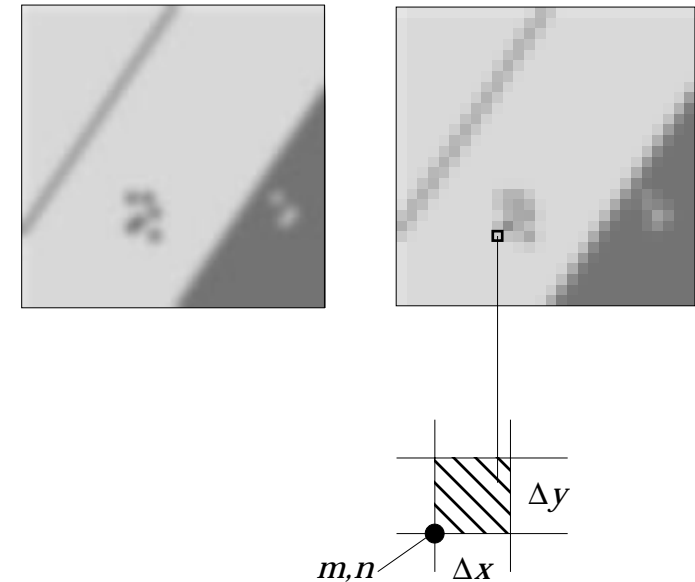


Bild 1—16

$$\begin{aligned} x &= m \cdot \Delta x \\ y &= n \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (1-31)$$

Aufgrund der vorausgesetzten Linearität und Shiftinvarianz reicht es für die Beschreibung der Übertragungseigenschaften eines LSI-Systems aus, wenn seine Antwortfunktion auf eine punktförmige Testfunktion $\delta(0,0)$ bekannt ist, wobei als „Punkt“ ein Pixelfeld mit der Amplitude 1 definiert wird (alle übrigen Pixel sind 0): der diskrete 2D-Delta-Impuls. Die Antwortfunktion auf eine diskrete Testfunktion ist die *diskrete PSF*. In Bild 1—17 ist der Schnitt durch eine zweidimensionale PSF $h(m,n)$ bei $y=0$ dargestellt.

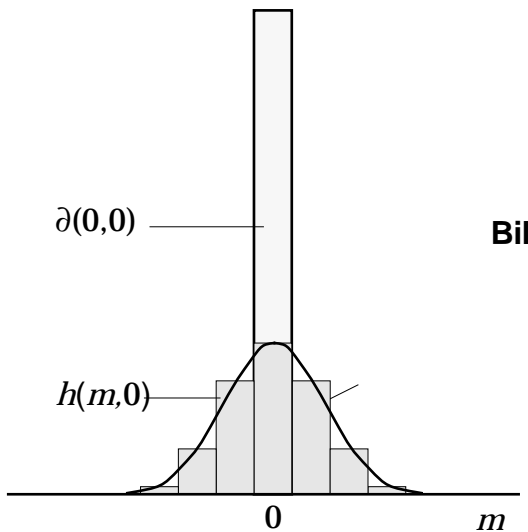
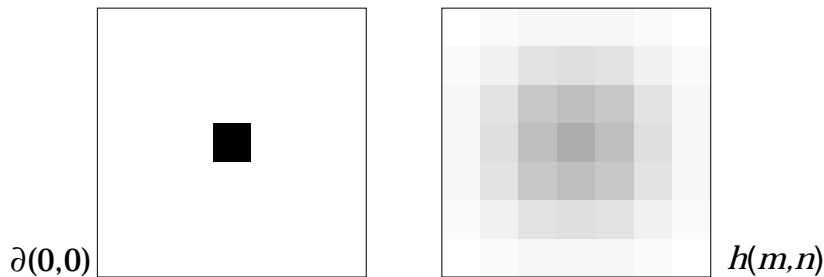


Bild 1—17

Die Antwortfunktion auf eine beliebige Eingangsfunktion kann nun ermittelt werden, indem für jedes Pixel die entsprechend dem Abtastwert skalierte und entsprechend seiner Position verschobene PSF berechnet wird. Die Überlagerung aller PSF ergibt die gesuchte Antwortfunktion, da bei LSI-Systemen der Superpositionssatz und die Invarianz gegenüber Verschiebungen gelten. (Bild 1—18 stellt dies für eine *eindimensionale* Funktion dar; zum Zwecke besserer Übersichtlichkeit sind die anteiligen Punktantworten als kontinuierliche Funktionen dargestellt.)

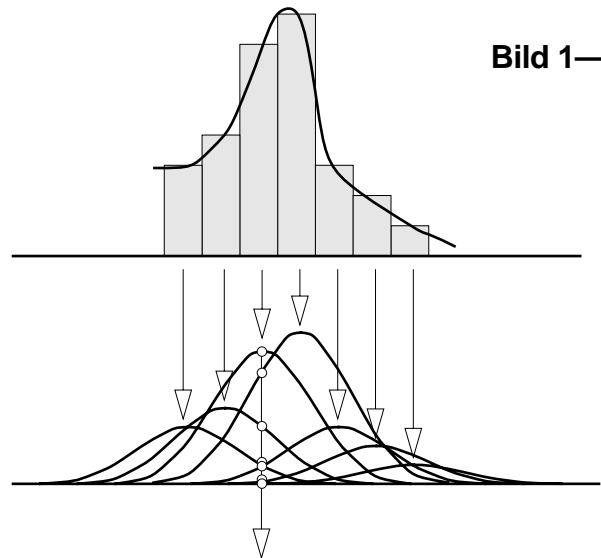
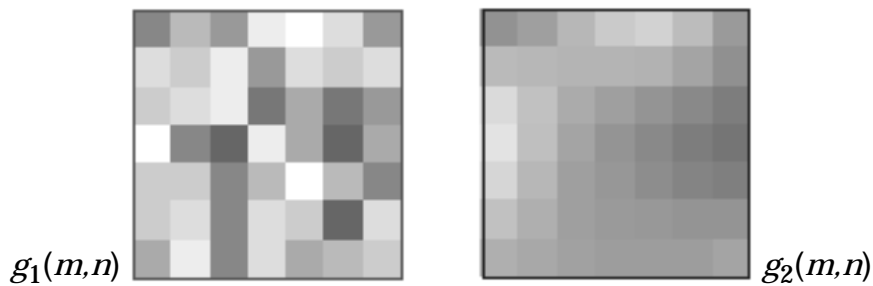


Bild 1—18

Summation der lateralen Wirkungen aller Nachbarn

1.3.2 Faltung

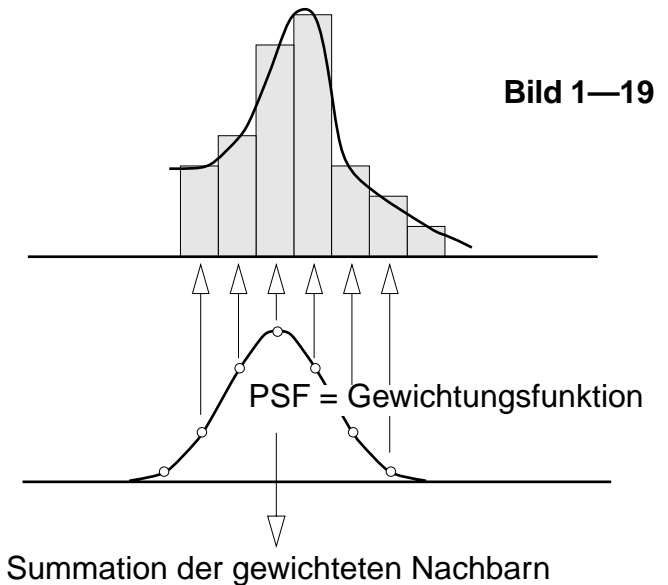
Ein algorithmisch brauchbarer Ansatz besteht darin, alle Beiträge aufzusummieren, die die Pixel der Eingangsfunktion g_1 zu dem zu berechnenden Pixel der Ausgangsfunktion g_2 liefern, Bild 1—19. Dieser Ansatz führt zu dem in Gl. (1–32) aufgestellten Algorithmus, der *diskreten Faltung*: Für jedes g_2 -Pixel ist die Doppelsumme über m' und n' in den Grenzen von $h(m,n)$ zu berechnen. Wegen ihrer grundlegenden Bedeutung wird die in Gl. (1–33) definierte symbolische Schreibweise für die Faltungsoperation eingeführt.

Point-spread-function und Faltung sind ein brauchbares Konzept, um die Übertragungseigenschaften eines LSI-Systems im Ortsbereich zu beschreiben:

- Die PSF ist die *Systembeschreibung*,
- die Faltung (Symbol $*$) ist der *Algorithmus* zur Ermittlung der Ausgangsfunktion bei einer beliebigen Eingangsfunktion.

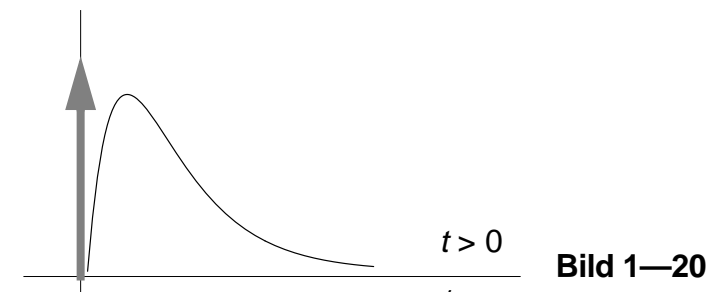
Wenn auch die Parallele zur Signalverarbeitung im Zeitbereich offenkundig ist, muss doch auf einen entscheidenden Unterschied hingewiesen werden: Im Zeitbereich sind Antwortfunktionen grundsätzlich *kausal* (Bild 1—20), denn ein zeitlich determiniertes Ereignis kann nicht in die Vergangenheit zurückwirken. So ist die Impulsantwort eines Übertragungssystems im Zeitbereich notwendigerweise Null auf der negativen Zeitachse. Auf der positiven Zeitachse ist die Impulsantwort gegeben durch Speicher- oder Laufzeiteffekte innerhalb des Übertragungssystems.

Physikalische Ursache für das ‘Verlaufen’ einer punktförmige Anregung im Ortsbereich sind unter anderem Dispersionseffekte wie auf Seite 29 aufgeführt, aufgrund derer eine Anregungsfunktion im allgemeinen in *alle* Richtungen auf ihre Umgebung ausstrahlt (ist das Medium, in dem diese Effekte auftreten, isotrop, kann die PSF sogar rotationssymmetrisch sein). Im mathematischen Sinn ist die PSF daher im allgemeinen *akausal*.



$$g_2(m, n) = \sum_{m'} \sum_{n'} h(m', n') \cdot g_1(m - m', n - n') \quad (1-32)$$

$$g_2(\vec{x}) = h(\vec{x}) * g_1(\vec{x}) \quad (1-33)$$



Im Zeitbereich ist ein Ereignis die Folge einer Kette von Ereignissen in der Vergangenheit — im Ortsbereich wird der Betrag eines Pixels durch die Einwirkung seiner umgebenden Pixel aus *allen* Richtungen bestimmt!

Die zwei- oder mehrdimensionale Faltungsoperation hat ihre Bedeutung in der Bildverarbeitung nicht nur aufgrund ihrer Eignung für die Simulation der Abbildungseigenschaften von Bildaufnahmesystemen, sondern vor allem, weil sie die vorwiegend angewandte algorithmische Grundlage für die Implementierung von Filtereffekten ist (siehe Abschnitt 5.4.1 ab Seite 110).

2 Mehrdimensionale Systemtheorie

2.1 Aufgaben der Systemtheorie

Bei der Bearbeitung von Systemen, die Signale übertragen — darunter verstehen wir alle Formen des Transportes, der Speicherung, der Transformation und Verarbeitung von Signalen — (Bild 2—1), stellen sich drei grundsätzliche Aufgaben, die eine formale Behandlung des Signals und des Übertragungssystems verlangen.

1. *Systemsimulation*

Das Systemverhalten h sei bekannt. Zu berechnen ist die Systemantwort (das Ausgangssignal) g_2 auf ein gegebenes Eingangssignal g_1 , Gl. (2-1). Diese Aufgabe stellt sich zum Beispiel, wenn nach der Wirkung eines bereits entworfenen aber noch nicht realisierten Systems gefragt wird.

2. *Signalrekonstruktion*

Die eigentliche Aufgabe eines Signalerfassungssystems ist es, ein Abbild eines Ausschnitts einer Realität zu liefern: Die in dem Ausgangssignal eines Systems enthaltene Information soll uns einen Rückschluss auf das Objekt ermöglichen, von dem das Eingangssignal abgeleitet oder erzeugt wurde. Zu lösen ist hier das zur ersten Aufgabe *inverse* Problem, die Rekonstruktion des unbekanntes Eingangssignals g_1 aus dem Ausgangssignal g_2 bei Bekanntsein des Systemverhaltens h , Gl. (2-2).

3. *Systemidentifikation*

Um die beiden genannten Aufgaben bearbeiten zu können, muss das Systemverhalten h bekannt sein. Wenn das Systemverhalten nicht konstruktionsbedingt gegeben ist, muss es experimentell ermittelt werden können, indem die Antwort g_2 auf ein bekanntes Testsignal g_1 ausgewertet wird, Gl. (2-3).

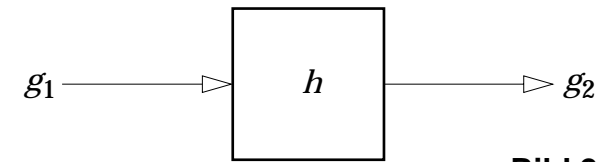


Bild 2—1

$$g_2(\mathbf{x}) = f[g_1(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})] \quad (2-1)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = f[g_2(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})] \quad (2-2)$$

$$h(\mathbf{x}) = f[g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x})] \quad (2-3)$$

Für die Lösung dieser Aufgaben liefert die Systemtheorie formale Modelle und algorithmische Werkzeuge. Während sich die klassische Systemtheorie mit eindimensionalen Signalen im Zeitbereich befasst, liegen in der Visualistik mehrdimensionale Signale im Ortsbereich vor. Die obigen Aufgabenstellungen sind aber vergleichbar. So liegt z.B. das an zweiter Stelle genannte grundsätzliche messtechnische Problem der Rückrechnung vom gelieferten Signal auf das reale Objekt vor, wenn aus dem Abbild eines Objektes dessen Form, Beschaffenheit oder Materialeigenschaften in ihrer Ortsverteilung *zurückgerechnet* werden soll. Die klassische Systemtheorie muss also auf mehrdimensionale Systeme erweitert werden.

Im folgenden werden die im weiteren benötigten Grundlagen für die Behandlung *zweidimensionaler LSI-Systeme* erläutert. Die Erweiterung des eindimensionalen Signalraums zu einem zweidimensionalen Raum kann konzeptuelle Anleitung sein für den Schritt zu höherdimensionalen Räumen, wo dies nötig sein wird.

2.2 Die diskrete Fourier-Transformation

Um das "Vorwärtsproblem" zu lösen, d.h. um eine Systemsimulation nach Gl. (2-1) durchzuführen, wurde in Abschnitt 1.3 auf Seite 29 die Systembeschreibung durch die diskrete PSF und als Operation die diskrete Faltung Gl. (2-4) mit ihrer abgekürzten Schreibweise Gl. (2-5) eingeführt, siehe Seite 32. Die für Signalrekonstruktion Gl. (2-2) und Systemidentifikation Gl. (2-3) benötigte, zur Faltung reziproke Operation existiert nicht. Das inverse Problem lässt sich jedoch wie bei eindimensionalen zeitabhängigen Signalen elegant mittels der *Fourier-Transformation* lösen.

Wie im vorangegangenen Abschnitt sollen auch im folgenden ausschließlich *diskrete finite* Signale betrachtet werden. In diesem Fall ist die diskrete Fouriertransformation (DFT) anzuwenden:

$$g_2(m, n) = \sum_{m'} \sum_{n'} h(m', n') \cdot g_1(m - m', n - n') \quad (2-4)$$

$$g_2(\mathbf{\hat{x}}) = h(\mathbf{\hat{x}}) * g_1(\mathbf{\hat{x}}) \quad (2-5)$$

$$x = m \cdot \Delta x$$

$$y = n \cdot \Delta y$$

- Die DFT transformiert ein diskretes finites Signal im Ortsbereich zu einem finiten diskreten Spektrum,
- der PSF entspricht im Spektralbereich eine komplexe 2-dimensionale Gewichtsfunktion,
- der Faltung im Ortsbereich entspricht im Spektralbereich eine algebraische Multiplikation,
- und schließlich erhalten wir im Spektralbereich die gewünschte zur Faltung im Ortsbereich *reziproke* Operation: eine algebraische Division.

In der Nachrichtentechnik ist für den Transformationsraum der Begriff Frequenzraum oder Frequenzbereich üblich. Obwohl bei der Anwendung der Fouriertransformation im Ortsbereich auch von (Orts-)Frequenzen gesprochen wird, werden wir im folgenden die bei der Fouriertransformation eingesetzten (periodischen) Eigenfunktionen in Anlehnung an die physikalische Begriffswelt *Wellenfunktionen* nennen. Der Reziprokwert der Periode wird dann nicht mehr mit (Orts-)Frequenz sondern mit *Wellenzahl* bezeichnet. Statt Frequenzbereich wird für den Transformationsraum der Begriff *Spektralbereich* gewählt.

2.2.1 Ein kleiner Exkurs in die Grundlagen

Aus der Beschränkung auf LSI-Signale folgt die Anwendbarkeit des Superpositionssatzes und des Verschiebungssatzes. In Abschnitt 1.3.1 auf Seite 30 wurde davon Gebrauch gemacht, indem die Antwort auf ein beliebiges diskretes Signal als Summation verschobener und gewichteter Kopien der PSF formuliert und daraus die Faltungsoperation hergeleitet wurde. Nun existieren Funktionen, für die gilt, dass die Summe aus beliebig gewichteten und verschobenen Funktionen desselben Typs wiederum eine Funktion von diesem Typ ergibt, Gl. (2-6). Das bedeutet, dass Signale dieses Funktionstypes beim Durchlaufen eines LSI-Systems nicht ihre Form ändern, sondern lediglich skaliert und/oder verschoben werden.

$$\sum_i a_i \cdot f(x - b_i) = A \cdot f(x - B) \quad (2-6)$$

Funktionen mit diesen Eigenschaften werden in der Theorie der linearen Differentialgleichungen *Eigenfunktionen* genannt. Ihr Grundtyp ist die e -Funktion mit imaginärem Argument, die nach *Euler* eine komplexe harmonische Wellenfunktion darstellt, Gl. (2-7). Darin ist K die Wellenzahl.

Eine physikalische Interpretation solcher Eigenfunktionen lässt sich leicht erreichen: Werden jeweils *konjugiert-komplexe* Eigenfunktionspaare summiert, ergeben sich reelle Cosinus-Wellen. Eine zu einer Welle K konjugiert-komplexe Welle erhält man bei der Wellenzahl $-K$.

Das Bezugssystem ist hier nicht mehr die *Zeitachse* sondern die *Bildebene* oder der *Objektraum*. Die Variablen im Argument der Eigenfunktionen sind in diesem Fall *Koordinaten* im Ortsbereich. (Wir werden uns im folgenden auf zweidimensionale Räume beschränken. Die dargestellten Ansätze können jedoch im allgemeinen ohne Schwierigkeiten in höherdimensionale Räume erweitert werden.)

Unser Ortsbereich ist *zweidimensional*, *finit* und *diskret*. Die Signalfunktionen in der Bildebene werden durch $M \cdot N$ äquidistante Stützpunkte beschrieben. Die Koordinaten in den zwei orthogonalen Dimensionen sind $m = \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ und $n = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Die Koordinaten m, n bezeichnen eine Pixelfläche $\Delta x \cdot \Delta y$ in einer Bildfläche $M \Delta x \cdot N \Delta y$, Bild 2-2. (Zur Festlegung der Koordinaten siehe auch Seite 30.)

In dem so definierten Signalbereich beschreibt die Signalfunktion g_x nach Gl. (2-8) einen zweidimensionalen Cosinus-förmigen Grauwertverlauf in x -Richtung mit der Ausrichtung seiner "Wellenkämme" in y -Richtung und k Schwingungsperioden innerhalb der Grenzen des Bildbereichs $M \cdot \Delta x$, Bild 2-3.

$$g_x(m, n) = e^{j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} + e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} = 2 \cdot \cos 2\pi \frac{k \cdot m}{M} \quad (2-8)$$

$$e^{j2\pi K} = \cos 2\pi K + j \sin 2\pi K \quad (2-7)$$

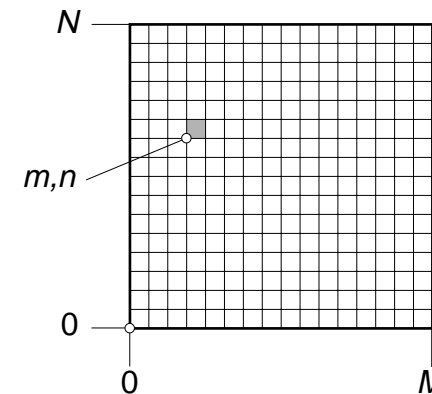


Bild 2-2

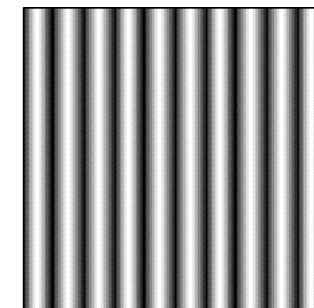


Bild 2-3

Eine Signalfunktion nach Gl. (2-9) beschreibt eine in Richtung $[k/M \ 1/N]^T$ laufende Welle, Bild 2-4.

$$g_{xy}(m, n) = e^{j2\pi\left(\frac{k \cdot m}{M} + \frac{l \cdot n}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{k \cdot m}{M} + \frac{l \cdot n}{N}\right)} \quad (2-9)$$

Statt der Wellenzahl wird auch die *Ortsfrequenz* f_x, f_y mit der Dimension *Linienpaare pro Längeneinheit* angegeben, Gl. (2-10). Während die Wellenzahl relativ zu den Abmessungen des Bildträgers definiert ist, ist die Angabe von Ortsfrequenzen ein absolutes Maß. Sie hat nur in Verbindung mit der Breite bzw. Höhe des jeweiligen Bildes eine Aussagefähigkeit.

Die Verschiebungsinvarianz einer Eigenfunktion ergibt sich aus Gl. (2-11): Die Verschiebung einer komplexen k -Welle um m_0 Pixelschritte lässt sich als Multiplikation dieser Eigenfunktion mit einem komplexen Faktor vom Betrag 1 darstellen. Skalierung und Verschiebung können also in einem einzigen (komplexen) Faktor zusammengefasst werden. In Anlehnung an die Terminologie der Nachrichtentechnik wird der Verschiebungsterm auch Phasenwinkel (kurz "Phase") φ genannt. Er ist dann spezifisch für die jeweilige Wellenzahl k .

Ist nun die Eingangsfunktion g_1 eines Systems h eine Eigenfunktion der Wellenzahl k_0 , dann kann die Ausgangsfunktion g_2 , die aus der Faltung hervorgeht, nach Gl. (2-12) in das *Produkt* aus der Eingangsfunktion und einem komplexen Faktor H zerlegt werden. $|H|$ stellt darin einen Skalierungsfaktor dar und φ einen die Ortsverschiebung bestimmenden Phasenwinkel.

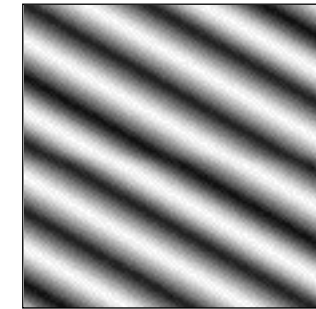


Bild 2-4

$$f_x = \frac{k}{M \cdot \Delta x} \quad f_y = \frac{l}{N \cdot \Delta y} \quad (2-10)$$

$$[f_x \ f_y] = 1 \frac{\text{lp}}{\text{mm}}$$

$$e^{j2\pi\frac{k(m-m_0)}{M}} = e^{j2\pi\frac{k \cdot m}{M}} \cdot e^{-j2\pi\frac{k \cdot m_0}{M}} = e^{j2\pi\frac{k \cdot m}{M}} \cdot e^{j\varphi_0}$$

$$m_0 = -\frac{M}{k} \cdot \frac{\varphi_0}{2\pi} \quad (2-11)$$

$$g_2(m) = h(m) * g_1(m) = h(x) * e^{j \cdot 2\pi \frac{k_0 \cdot m}{M}} = \sum_{m'} h(m') \cdot e^{j \cdot 2\pi \frac{k_0}{M}(m-m')} = e^{j \cdot 2\pi \frac{k_0 \cdot m}{M}} \underbrace{\sum_{m'} h(m') \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{k_0 \cdot m'}{M}}}_{\mathbf{H}(k_0) = |H(k_0)| \cdot e^{j \cdot \varphi_{k_0}}} = \mathbf{H}(k_0) \cdot g_1(m) \quad (2-12)$$

Nun gilt der sich aus dieser Rechnung ergebende “Übertragungs”-Faktor allerdings nur für die oben angenommene Signalfunktion. Ist jedoch die Eingangsfunktion g_1 eine beliebige *periodische* Funktion, kann diese durch die Summe einer harmonischen Folge von Eigenfunktionen dargestellt werden, Gl. (2-13). Deren Wellenzahlen k sind Vielfache der Grundwelle der Signalfunktion, die in $m = M$ periodisch ist. Die DFT Gl. (2-14) liefert die Koeffizienten $\mathbf{G}_1(k)$. Die Koeffizienten $\mathbf{G}_1(k)$, $\mathbf{G}_1(-k)$ treten paarweise konjugiert komplex auf, wenn die Signalfunktion reell ist. Die vollständige Folge der komplexen Koeffizienten ist das *diskrete Spektrum* $\mathbf{G}_1(k,l)$ der periodischen Signalfunktion $g_1(m,n)$.

Die (Rück-)Gewinnung einer periodischen Funktion aus einer Folge von Eigenfunktionen nach Gl. (2-13) wird als *inverse DFT* bezeichnet.

Das Gleichungspaar (2-13)/(2-14) ist auch bekannt als *Runge-Gleichungssystem*. DFT und inverse DFT sind bis auf den numerischen Faktor $1/M$ und die Invertierung des Argumentes *symmetrisch*.

Andererseits kann auf jede Eigenfunktion eine Systemantwort $H(k)$ ermittelt werden. Aus Gl. (2-12) ergibt sich hierfür dieselbe Form der Transformationsgleichung wie für die Signalfunktion, Gl. (2-14). Daraus folgt, dass genau wie eine Signalfunktion auch eine PSF mittels einer DFT in den Spektralbereich transformiert werden kann, Gl. (2-15). Sie ergibt dort eine komplexe spektrale *Übertragungsfunktion*, d.h. das Spektrum $G_1(k)$ der Eingangsfunktion $g_1(m)$ eines Systems ist für jede Wellenzahl k mit dem entsprechenden komplexen Gewichtungsfaktor $H(k)$ der Übertragungsfunktion zu *multiplizieren*, um die Spektralkoeffizienten $G_2(k)$ des Ausgangssignals zu ermitteln: *Der Faltung im Ortsbereich entspricht eine Multiplikation im Spektralbereich*, Gl. (2-16)!

Infolge der Symmetrie zwischen DFT und inverser DFT gilt auch die komplementäre Beziehung: *Einer Multiplikation im Ortsbereich entspricht die Faltung der Transformatierten im Spektralbereich*.

$$g_1(m) = \frac{1}{M} \sum_k \mathbf{G}_1(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} \quad (2-13)$$

$$\mathbf{G}_1(k) = \sum_m g_1(m) \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} \quad (2-14)$$

$$\mathbf{H}(k) = \sum_m h(m) \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} \quad (2-15)$$

$$g_2(m) = h(m) * g_1(m)$$
$$\mathbf{G}_2(k) = \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{G}_1(k) \quad (2-16)$$

Bisher wurde davon ausgegangen, dass die Signalfunktion unendlich ausgedehnt und periodisch sei. Bilder sind jedoch keine periodischen Signalfunktionen sondern infolge der endlichen Ausdehnung von Bildsensoren grundsätzlich *finite* Signale. Sie bestehen aus einer zweidimensionalen endlichen Folge von $M \cdot N$ äquidistanten Abtastwerten, siehe Bild 2—2 auf Seite 38. Eine finite Funktion $g_1(m)$, $m = \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ kann aber als Ausschnitt einer Grundwellenperiode M einer infiniten periodischen Funktion gedeutet werden (Bild 2—5) — resp. kann aus einer finiten Funktion eine periodische Funktion durch eine sog. *periodische Fortsetzung* hergestellt werden. Die Periode der Grundwelle ist in diesem Fall durch die Abmessungen des Bildes gegeben, ihre Ortsfrequenz ist der Reziprokwert der Bildbreite bzw. der Bildhöhe, Gl. (2—17).

Andererseits sind die hier betrachteten Signalfunktionen nicht nur *finit*, sondern — bedingt durch den physikalischen Aufbau des Bildsensors aus einzelnen Detektorelementen oder durch eine an einen kontinuierlich wirkenden Detektor anschließende Analog/Digital–Conversion — auch *diskret*.

Aus dem Abtasttheorem, auf das in Abschnitt 2.5.2 auf Seite 52 noch eingegangen werden wird, ergibt sich für die Wellenzahl der in einem diskreten Signal enthaltenen Eigenfunktionen als obere Grenze die *halbe* Wellenzahl der Abtastfunktion, Gl. (2—18). Letztere ist m bzw. n , denn eine 2–dimensionale Abtastfunktion kann als 2–dimensional periodische Folge von Punktfunktionen $\delta(m, n)$ verstanden werden, mit der das Signal multipliziert wird. D.h. die Periode der kürzesten Welle, die durch die Wertefolge eines diskreten Signals beschrieben werden kann, ist doppelt so lang wie der Rasterabstand der Pixel bzw. der Detektorelemente.

Damit wird das Spektrum einer diskreten Funktion finit. Zur vollständigen Beschreibung eines diskreten reellen Signals $g_1(m)$, $m = \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ werden damit genau $M/2$ Paare konjugiert–komplexer Spektralkoeffizienten $\mathbf{G}_1(k)$, $\mathbf{G}_1(-k)$, $k = \{0, 1, 2, \dots, M/2-1\}$ benötigt — im 2–dimensionalen Fall entsprechend $M/2 \cdot N/2$ Paare.

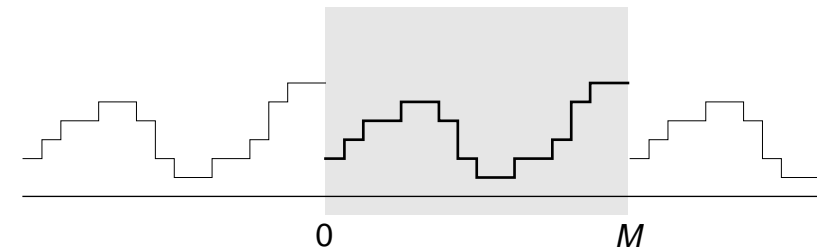


Bild 2—5

$$f_x(k=1) = \frac{1}{M \cdot \Delta x} \quad (2-17)$$

$$f_y(l=1) = \frac{1}{N \cdot \Delta y}$$

$$f_{x\max} = f_x \Big|_{k=\frac{M}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \quad (2-18)$$

$$f_{y\max} = f_y \Big|_{l=\frac{N}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \Delta y}$$

Aufgrund der Symmetrie zwischen DFT und inverser DFT kann aus der diskreten Natur der Signalfunktion auch auf eine periodische Wiederholung des Spektrums mit der (spektralen) Periode $k = M$ geschlossen werden. Die für die Repräsentation einer Signalfunktion mit M Abtastwerten notwendigen M Spektralkoeffizienten können deshalb sowohl im Wellenzahlintervall $-M/2 \leq k < M/2$ als auch im Intervall $0 \leq k < M$ dargestellt werden. Wir bevorzugen hier die erste Darstellungsart, Bild 2—6. Bei der üblicherweise reellen Signalfunktion sind die Koeffizienten für positive und negative Wellenzahlen betragsmäßig jeweils gleich, ihre Phasenwinkel sind genau entgegengesetzt. Für eine in M Abtastwerten beschriebenen Signalfunktion müssen daher genau $M/2$ komplexe Koeffizienten berechnet werden.

Die Berechnung der komplexen Koeffizienten erfolgt getrennt nach Realteil und Imaginärteil. Der dazu benötigte Satz diskreter Cosinus- und Sinus-Funktionen ist in Tabellen abgelegt. Die Transformation einer Signalfunktion von M Abtastwerten erfordert insgesamt M^2 Grundoperationen (= Multiplikations-Additions-Schritte). Mit der sogenannten "Fast Fourier Transform" (FFT), einem hierarchisch aufgegliederten und mehrfach ineinander geschachtelten Algorithmus, verringert sich der Rechenaufwand auf nur noch $(M/2) \cdot \lg M$ Grundoperationen.

2.3 Zweidimensionale diskrete Fourier-Transformation (2D-DFT)

Eine zweidimensionale periodische Funktion lässt sich als Überlagerung zweidimensionaler komplexer Wellenfunktionen $G_1(k, l)$ deuten. Eine zweidimensionale Welle (k, l) wird durch eine Summe im Argument der Eigenfunktionen beschrieben, siehe Gl. (2-9) und Bild 2—4 auf Seite 39. Eine zweidimensionale Eigenfunktion kann somit als Produkt der zueinander orthogonalen Wellen $(k, 0)$ und $(0, l)$ interpretiert werden. Korrespondierend zum Gleichungspaar (2-13), (2-14) ergibt eine entsprechende Erweiterung der Argumente die 2D-DFT, Gl. (2-20) und die inverse 2D-DFT, Gl. (2-19).

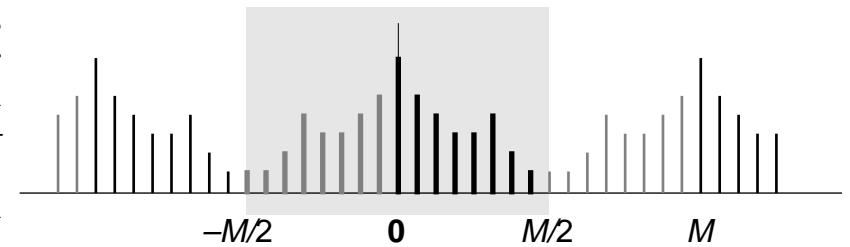


Bild 2—6

$$g_1(\vec{x}) = g_1(m, n) = \sum_k \sum_l G_1(k, l) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{k \cdot m}{M} + \frac{l \cdot n}{N}\right)} \quad (2-19)$$

$$G_1(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_m \sum_n g_1(m, n) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k \cdot m}{M} + \frac{l \cdot n}{N}\right)} \quad (2-20)$$

2.3.1 Herleitung der 2D-Transformierten aus 1D-Funktionen

Hilfreich für die Veranschaulichung der Korrespondenzen zwischen Ortsbereichs- und Spektralbereichsdarstellung ist die Kenntnis der Transformierten einiger ausgewählter zweidimensionaler Funktionen. Wir können uns dabei auf die geläufigen eindimensionalen Korrespondenzen stützen¹. Die Umsetzung aus dem eindimensionalen in höherdimensionale Funktionsräume (hier beschränken wir uns auf zweidimensionale Räume) kann auf unterschiedlichen Wegen erfolgen:

1. Ausgangspunkt ist die *Separierbarkeit* höherdimensionaler Fourierintegrale bzw. -summen: Für eine zweidimensionale Fouriertransformation wird die Ortsfunktion in einem ersten Transformationsschritt zeilenweise *eindimensional* transformiert. Die so entstandenen Koeffizientenvektoren sind die Zeilen eines Zwischen-“Bildes”. Dieses wird in einem zweiten Schritt spaltenweise einer wiederum *eindimensionalen* Fouriertransformation unterzogen, Bild 2—7.

Auf diesem Wege lässt sich die Konstruktion der zweidimensionalen Fouriertransformierten leicht durchführen, wenn sich die Ausgangsfunktion zeilenweise so zerlegen lässt, dass eindimensionale Funktionen mit bekannten Transformierten sowohl bei der zeilenweisen Zerlegung des Bildes als auch bei der spaltenweisen Aufstellung der Koeffizienten für den zweiten Transformationsschritt entstehen (selbstverständlich gilt dies auch für eine Vertauschung der Dimensionen).

2. Wenn sich die zu transformierende Bildfunktion unter Anwendung einer linearen Operation (Addition, Multiplikation) aus Grundfunktionen mit jeweils bekannten Transformierten synthetisieren lässt, kann ihre Transformierte unter Anwendung derselben Operation aus den Transformierten dieser Grundfunktion gebildet werden. Dies gilt auch für den Fall, dass sich die zu transformierende zweidimensionale

Bild 2—7

$$G_1(k, l) = \sum_n \left[\sum_m g_1(m, n) \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} \right] \cdot e^{-j2\pi \frac{l \cdot n}{N}}$$

1. H D Lüke: Signalübertragung, Springer 1995

Funktion durch Faltung eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor erzeugen lässt. Die Transformierte dieser Funktion ist in diesem Fall durch die Faltung der Koeffizientenzeile mit der Koeffizientenspalte herzustellen, die sich aus eindimensionalen Transformationen der oben genannten Vektoren ergeben.

- Die Fourier–Transformierte rotationssymmetrischer Ortsfunktionen sowie von Ortsfunktionen, deren partielle Ableitung in eine Richtung Null ist, können mittels Anwendung des Zentralschnitt–Theorems (siehe Seite 53) hergeleitet werden.

Drei Beispiele sollen die beiden erstgenannten Vorgehensweisen erläutern: Streifenmuster mit sinus-/cosinusförmigen Verlauf, die zweidimensionale rect–Funktion und die zweidimensionale Gauß–Funktion.

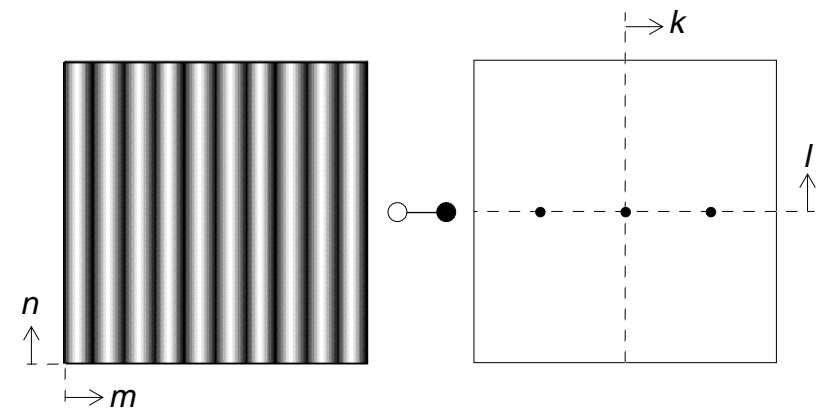


Bild 2–8

2.3.2 Streifenmuster, harmonische Wellen

Methode 1 auf eine horizontal orientierte Cosinuswelle (senkrechte Kämme) mit k_1 Wellenzügen innerhalb der Bildgrenzen M angewandt ergibt für alle Zeilentransformierten gemäß Gl. (2–8) auf Seite 38 ein Koeffizientenpaar mit den Wellenzahlen $\pm k_1$ sowie einen Koeffizienten im Ursprung, der den mittleren Grauwert repräsentiert. Die Spalten des “Zwischenbildes” sind Null bis auf die Spalten mit den Wellenzahlen $k = 0, \pm k_1$. Diese drei Spalten stellen jeweils Gleichverteilungen dar. Entsprechend besitzt ihre Transformierte nur bei der Wellenzahl $l = 0$ einen von Null verschiedenen Wert, Bild 2–8.

Um die 2–D–Transformierte eines gegenüber Bild 2–8 gedrehten und gedehnten Wellenmusters herzuleiten, können im Vorgriff auf Abschnitt 2.5.1 auf Seite 51 *Rotationssatz* und den *Ähnlichkeitsatz* herangezogen werden: Die Transformation ergibt wiederum außer dem Ursprungskoeffizienten nur zwei weitere von Null verschiedene Koeffizienten, die aufgrund der niedrigeren Wellenzahl dichter am Ursprung liegen und eine Achse in Normalenrichtung zu den Wellenkämmen aufspannen, Bild 2–9.

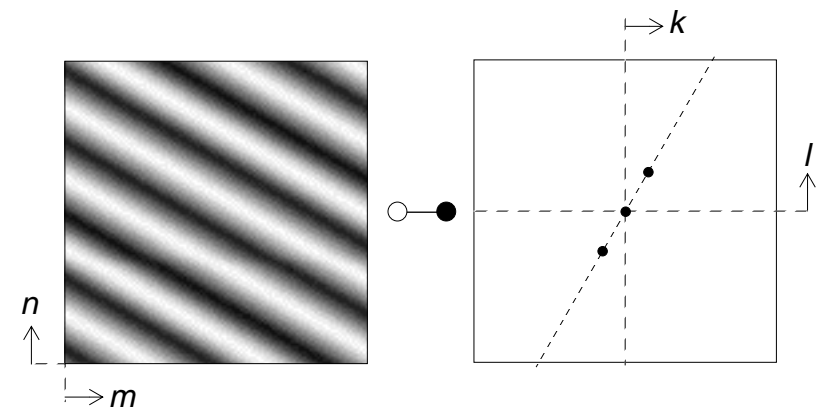


Bild 2–9

2.3.3 Die 2D-rect-Funktion

Die zweidimensionale rect-Funktion wird auch Apertur-Funktion genannt, da sie z.B. die PSF eines Abtastvorganges mit einer rechteckförmigen Blende der Abmessungen m_1, n_1 Pixel darstellt. Ihre Transformierte ist die so genannte si-Funktion, Gl. (2-21).

Eine zeilenweise Zerlegung der zweidimensionalen rect-Funktion (Methode 1) ergibt im Außenbereich Zeilen, die ausschließlich mit Nullwerten besetzt sind. Alle Koeffizienten der Transformierten werden hier ebenfalls Null. Im Zentralbereich ergeben sich identische eindimensionale rect-Funktionen, deren Transformierte si-Funktionen sind (zu beachten ist, dass der Phasenwinkel an den Nullstellen um jeweils 180° springt!). Alle Spalten werden nun wieder rect-Funktionen, deren Amplitude durch den wellenzahlabhängigen Funktionswert der si-Funktion gegeben ist. Nach erfolgter Transformation der Koeffizientenspalten finden wir auch in den Spalten si-Funktionen. Schachbrettartig wechseln Koeffizientenfelder mit den Phasenwinkeln 0° und 180° , d.h. an Nullstellen (horizontale und vertikale Grenzlinien dieser Felder) wechselt das Vorzeichen. Strukturen dieser Wellenzahlen werden also kontrastmäßig *invertiert!* Bild 2-10 zeigt die zweiseitige Transformation einer 4-pixelweiten quadratischen Apertur.

$$g_1(\vec{x}) = g_1(m, n) = \text{rect}\left(\frac{m}{m_1}, \frac{n}{n_1}\right)$$



$$G_1(k, l) = \text{si}\left(\pi k \frac{m_1}{M}\right) \cdot \text{si}\left(\pi l \frac{n_1}{N}\right)$$

mit: $\text{si}(x) = \frac{\sin x}{x}$ (2-21)

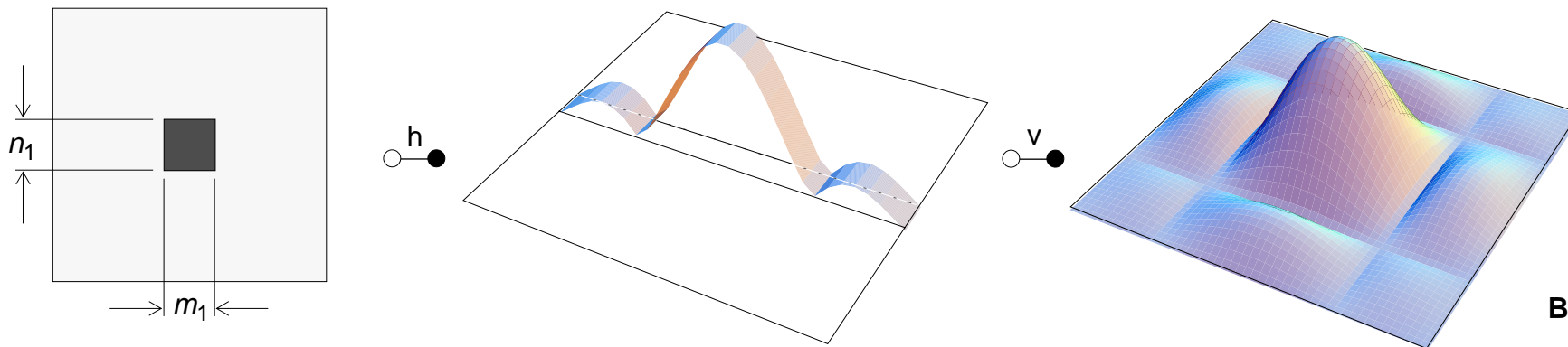


Bild 2-10

2.3.4 Die zweidimensionale Gauß-Funktion

Die Gauß-Funktion hat in der Systemtheorie eine besondere Stellung, da ihre Transformierte wiederum eine Gauß-Funktion ist. Eine zweidimensionale Gauß-Funktion ist isotrop, d.h. invariant gegenüber einer Rotation des Koordinatensystems, Gl. (2-22). Sie kann durch Faltung einer horizontalen eindimensionalen Gauß-Funktion mit einer vertikalen eindimensionalen Gauß-Funktion erzeugt werden. Folglich führt die Faltung der horizontalen und vertikalen Transformaten ebenfalls zu einer isotropen zweidimensionalen Gauß-Funktion, Bild 2-11 links.

Wird die Ortsfunktion linear verzerrt, dann wird die Transformierte reziprok dazu verzerrt — einer Stauchung entspricht also eine Dehnung und umgekehrt, Bild 2-11 rechts (siehe *Ähnlichkeitssatz*, Seite 51)

$$g_1(\vec{x}) = g_1(m, n) = e^{-\pi a^2(m^2 + n^2)}$$

$$G_1(k, l) = e^{-\pi \frac{1}{a^2} \left(\frac{k^2}{M^2} + \frac{l^2}{N^2} \right)}$$

(2-22)

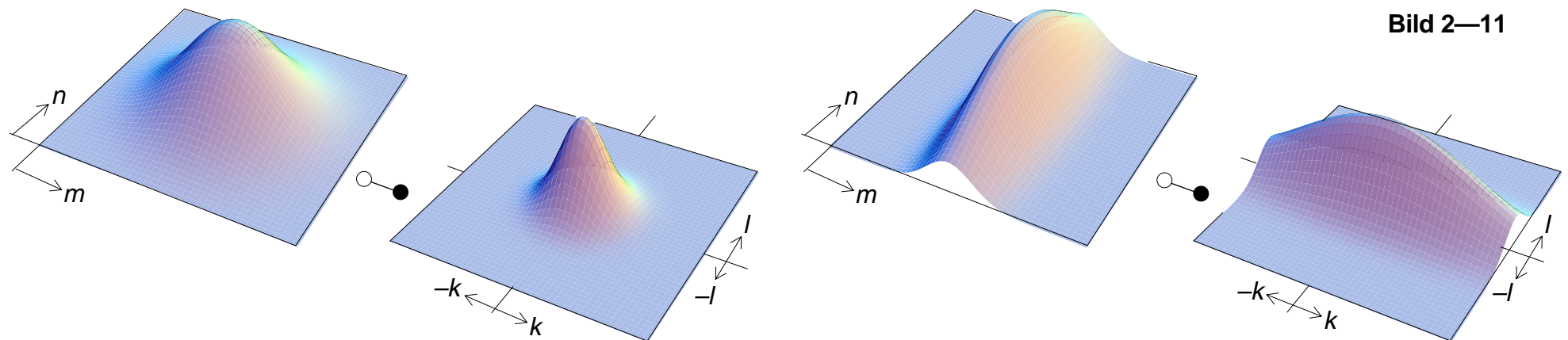


Bild 2-11

2.3.5 Punkt, Punktraster und Gerade

Weitere interessante zweidimensionale Funktionen sind der Punkt (die zweidimensionale δ -Funktion), die δ -Gerade und das δ -Punktraster.

Die Transformierte einer 1D- δ -Funktion ist eine 1D-Gleichverteilung. Die 2D- δ -Funktion kann als Faltung einer horizontalen 1D- δ -Funktion mit einer vertikalen 1D- δ -Funktion interpretiert werden (Methode 2). Ihre Transformierte ist also die Faltung zweier 1D-Gleichverteilungen. Sie ergibt erwartungsgemäß eine 2D-Gleichverteilung.

Aus der 2D- δ -Funktion kann das Punktraster abgeleitet werden. Ein Punktraster ist eine zweidimensional erweiterte \sqcap -Funktion ("scha"-Funktion), d.h. eine zweidimensional periodische Folge von 2D- δ -Funktionen. Wie die Transformierte der \sqcap -Funktion ist auch die Transformierte des Punktrasters wieder ein Punktraster, Bild 2-12. Die Ortsintervalle seien ein ganzzahliges Vielfaches m_0, n_0 der Pixelintervalle. In beiden Dimensionen sind die Wellenzahlintervalle *reziprok* zu den Ortsintervallen ($k_0 = M/m_0, l_0 = N/n_0$). Dies ist wiederum leicht nachzuvollziehen, wenn das Punktraster mittels Faltung einer horizontalen \sqcap -Funktion mit einer vertikalen \sqcap -Funktion erzeugt wird.

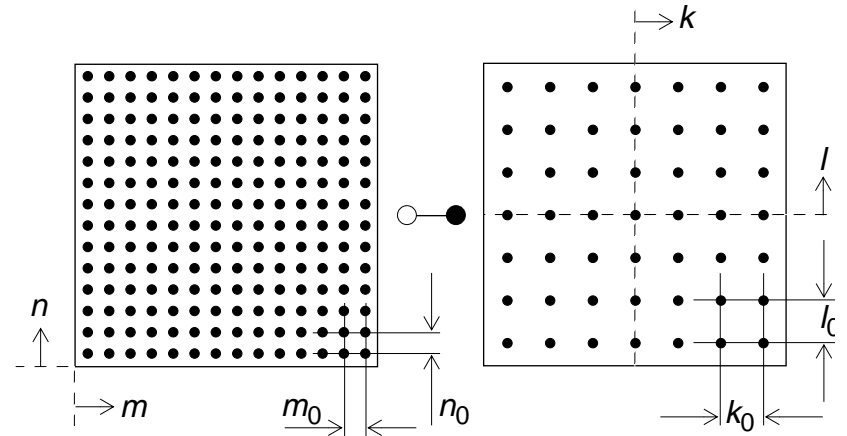


Bild 2-12

Im Gegensatz zur 2D- δ -Punktfunktion, die in beiden Dimensionen infinitesimal ausgedehnt ist, ist die δ -Gerade im Kontinuierlichen eine unendliche ausgedehnte, infinitesimal breite, amplitudenkonstante Linie — im Diskreten eine 1-pixelbreite, bis zu den Bildgrenzen ausgedehnte gleichverteilte Linie. Ihre Transformierte ist ebenfalls eine δ -Gerade, die jedoch *senkrecht* auf der δ -Geraden im Ortsbereich steht und durch den Ursprung des Spektralbereiches geht, Bild 2-13. Dies kann sowohl mittels Methode 1 als auch mit Methode 2 hergeleitet werden: Eine $\delta_{m,0}$ -Gerade, verkörpert durch eine zentrale Bildzeile, transformiert zeilenweise zu einem zentralen $\delta_{0,0}$ -Punkt. Spaltenweise transformiert wird eine $\delta_{0,l}$ -Gerade aus dem Punkt im Zentrum (Methode 1). Eine $\delta_{m,0}$ -Gerade kann andererseits als Faltung eines gleichverteilten Zeilenvektors mit einer 1D- δ -Funktion als Spaltenvektor interpretiert werden. Gemäß Methode 2 sind die 1D-Transformierten — der Zeilenkoeffizientenvektor ist nun eine 1D- δ -Funktion, der Spaltenkoeffizientenvektor gleichverteilt — miteinander zu falten, was die erwartete $\delta_{0,l}$ -Gerade ergibt.

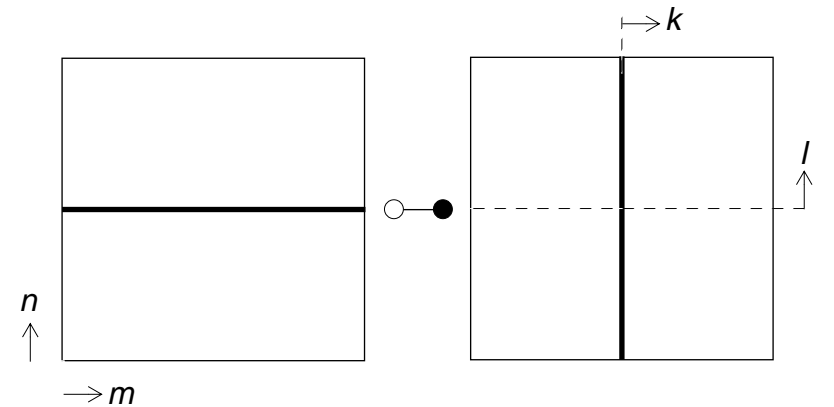


Bild 2-13

2.4 OTF— MTF — PTF

Die komplexe Transformierte einer zweidimensionalen PSF (Abschnitt 1.3.1 auf Seite 30) wird als “*Optical Transfer Function*” (OTF) bezeichnet. Sie wird meist in Betrags- und Phasenfunktion getrennt dargestellt. Für die Betragsfunktion hat sich die Bezeichnung “*Modulation Transfer Function*” (MTF), für die Phasenfunktion “*Phase Transfer Function*” (PTF) etabliert.

Im Zeitbereich vermittelt uns die Kenntnis der Übertragungsfunktion eines Verstärkers, Filters oder Übertragungskanals eine Vorstellung über die zu erwartenden klanglichen Veränderungen eines Tongemisches, weil wir dies als Überlagerung einzelner Tonschwingungen interpretieren, die vom System jeweils unterschiedlich behandelt werden. Auch in der Bildverarbeitung ist die Darstellung des Systemverhaltens bezüglich der Veränderung, die ein Bildsignal durch ein System erfährt, im Transformationsbereich oft einfacher zu interpretieren als die PSF. Für ein intuitives Verständnis der Zusammenhänge kann es hilfreich sein, im Zweidimensionalen die zur Signalverarbeitung analogen Vorstellungen zu entwickeln:

- Die OTF kann als ein Maß für die Schwächung bzw. Verstärkung von Wellenmustern (MTF) und für deren örtliche Verschiebung (PTF) in Abhängigkeit von ihrer Wellenzahl verstanden werden.

Dabei stehen Wellenmuster mit hoher Wellenzahl pauschal für detailreiche Partitionen in einem Bild, für scharfgezeichnete Kanten und linienhafte Strukturen. Wellenmuster mit niedriger Wellenzahl stehen für großflächige Kontrastunterschiede. Die Wirkung der drei in Bild 2—14 skizzierten jeweils isotropen MTF-Verläufe ist, obwohl alle dieselbe Grenzfrequenz haben, in charakteristischer Weise unterschiedlich: Gegenüber MTF(b) macht MTF(a) das Bild verschwommen, MTF(c) dagegen verschärft Strukturen und Kanten.

$$\begin{array}{ccccccc}
 h(m, n) & \text{○—●} & \mathbf{H}(k, l) = |\mathbf{H}(k, l)| \cdot e^{j\varphi(k, l)} & & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 \text{PSF} & & \text{OTF} & \text{MTF} & \text{PTF} & &
 \end{array}$$

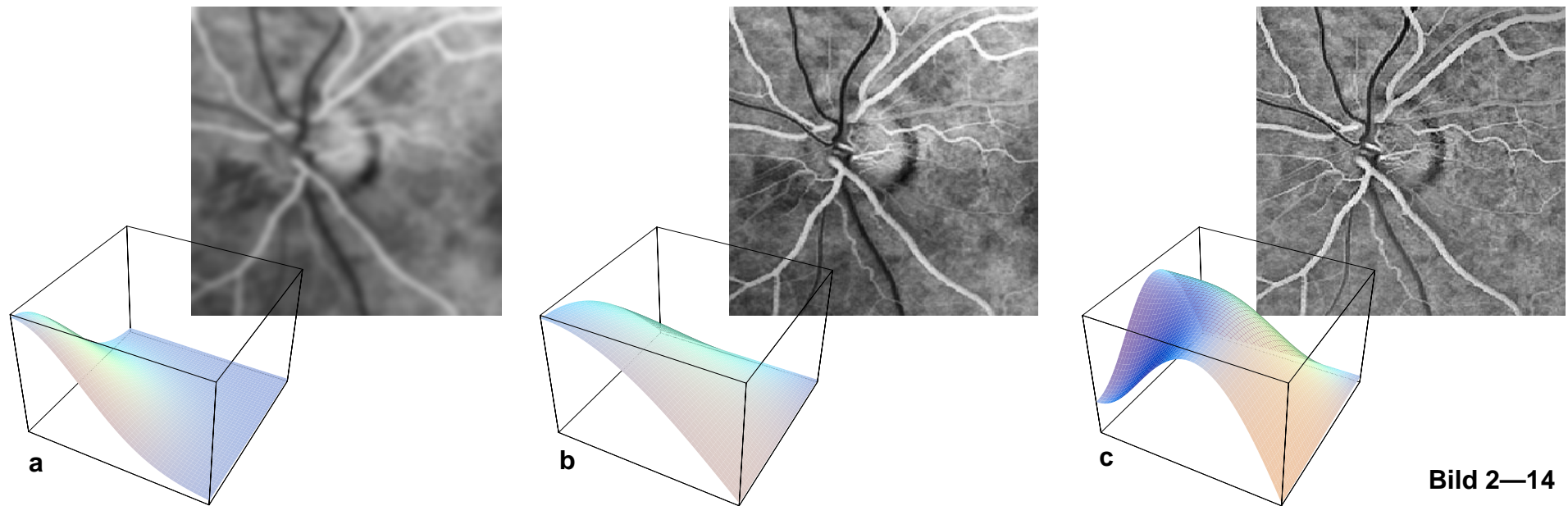


Bild 2—14

Anders als im Zeitbereich übt eine Verzerrung der Phase der einzelnen Signalkomponenten infolge einer nichtlinearen PTF eine essentiell verfälschende Wirkung auf ein Bild aus. Denn während die Synthese eines Bildes aus seinen Spektralkomponenten (Wellenmustern) selbst bei stärkeren Veränderungen ihrer ursprünglichen Amplitude kaum gestaltmäßigen Einfluss hat, kann sich eine unterschiedlich starke örtliche Verschiebung der Wellenmuster strukturmäßig verzerrend auf die Bildinhalte auswirken. Insbesondere können störende Strukturen (“Artefakte”) neu entstehen und möglicherweise wahrnehmungsrelevante Bildinhalte überdecken. Frei von derartigen Verfälschungen sind ausschließlich Systeme, die keine örtliche Verschiebung verursachen oder die alle Spektralkomponenten um dieselbe Distanz $[m_0 \ n_0]^T$ verschieben, d.h. deren Phasenwinkel nach Gl. (2–23) wellenzahlproportional ist, siehe auch Gl. (2–11) auf Seite 39. Letztere bezeichnen wir als *linearphasige* Systeme mit dem häufigen erstgenannten Sonderfall der *nullphasigen* Systeme.

$$\varphi_k = -\frac{k}{M} \cdot m_0 \cdot 2\pi$$

$$\varphi_l = -\frac{l}{N} \cdot n_0 \cdot 2\pi$$
(2–23)

Null- oder Linearphasigkeit ist im allgemeinen eine Grundforderung an Systeme für die Bildaufnahme, -übertragung und -darstellung. Wenn diese Forderung erfüllt ist, reicht für die Systembeschreibung die MTF aus. Daraus erklärt sich, dass die Darstellung der komplexen OTF, d.h. die Hinzunahme der PTF für die Beschreibung der Übertragungseigenschaften in der Bildverarbeitung eher ungebräuchlich ist.

Für die Beurteilung der Wirkung von Filtern, mit denen bestimmte Effekte erzielt werden sollen (siehe unten), ist die Analyse der PTF jedoch unverzichtbar. Dies zeigt schon das einfache Beispiel einer 2D-rect-Funktion als Filter-PSF, die aufgrund ihrer lokalen Mittelwertbildung gerne zur "Glättung" von Bildstrukturen verwandt wird. Die Transformierte einer 2D-rect-Funktion ist eine 2D-si-Funktion, siehe Abschnitt 2.3.3 auf Seite 45. Ihre Phase alterniert sprunghaft zwischen 0° und 180° , d.h. alle Wellenfunktionen in den 180° -Intervallen werden um eine halbe Periode verschoben, also kontrastmäßig invertiert!

2.5 Theoreme der 2D-DFT

Sowohl der formale als auch der anschauungsmäßige Umgang mit der Fourier-Transformation wird durch die Kenntnis einiger wichtiger Theoreme der Fourier-Transformation erleichtert. Im allgemeinen haben diese Theoreme auch direkte praktische Bedeutung, indem sie Anwendung bei der Konzeption grundlegender Bildverarbeitungsprozesse finden.

Im folgenden werden die für das Verständnis des vorliegenden Stoffes wesentlichen Sätze der 1D-DFT ins 2-Dimensionale übertragen und durch einige Sätze, die ausschließlich für mehrdimensionale Systeme gelten, ergänzt. Ausführlicher werden anschließend das ins Mehrdimensionale übertragende *Abtasttheorem* sowie das *Zentralschnitt-Theorem*, das keine Entsprechung im Eindimensionalen hat, behandelt.

2.5.1 Grundlegende Sätze der 2D-DFT

<p><i>Symmetrie</i> 2D-DFT und inverse 2D-DFT sind aufgrund der Symmetrie ihrer Transformationsgleichungen (2-19) und (2-20) symmetrisch zueinander.</p>	$\begin{aligned} g(m, n) \text{ --- } \bullet & \quad \mathbf{G}(k, l) \\ G(m, n) \text{ --- } \bullet & \quad \mathbf{g}(k, l) \end{aligned} \quad (2-24)$
<p><i>Faltung vs. Multiplikation</i> Die Faltung zweier Funktionen entspricht der Multiplikation der Transformierten dieser Funktionen. Aufgrund der Symmetrie der Transformation ist diese Korrespondenz ebenfalls symmetrisch.</p>	$\begin{aligned} g(m, n) * h(m, n) \text{ --- } \bullet & \quad \mathbf{G}(k, l) \cdot \mathbf{H}(k, l) \\ g(m, n) \cdot h(m, n) \text{ --- } \bullet & \quad \mathbf{G}(k, l) * \mathbf{H}(k, l) \end{aligned} \quad (2-25)$
<p><i>Superposition</i> Für LTI-Systeme gilt der Superpositionssatz.</p>	$a_1 g_1 + a_2 g_2 \text{ --- } \bullet \quad a_1 \mathbf{G}_1 + a_2 \mathbf{G}_2 \quad (2-26)$
<p><i>Spiegelung</i> Spiegelung einer Funktion führt zur Spiegelung ihrer Transformierten.</p>	$g(M-m, N-n) \text{ --- } \bullet \quad \mathbf{G}(-k, -l) \quad (2-27)$
<p><i>Ähnlichkeit</i> Die Stauchung einer Funktion entspricht der Dehnung ihrer Transformierten. Die Anwendung des Ähnlichkeitssatzes im Diskreten setzt die Erweiterung der Funktionsräume um die ganzzahlig-positiven Dehnungs- bzw. Stauchungsfaktoren voraus. Die in die gedehnte Funktion eingefügten zusätzlichen Abtastpunkte sind durch si-interpolierte Werte zu füllen.</p>	$\begin{aligned} g(am, bn) \text{ --- } \bullet & \quad \frac{1}{ab} \mathbf{G}(k, l) \\ g(m, n) \text{ --- } \bullet & \quad ab \mathbf{G}(ak, bl) \end{aligned} \quad (2-28)$ $\begin{aligned} m = 0 \dots aM-1 & \quad k = -aM/2 \dots aM/2-1 \\ n = 0 \dots bN-1 & \quad l = -bN/2 \dots bN/2-1 \end{aligned}$
<p><i>Verschiebung</i> Eine lineare Verschiebung der Ortsfunktion überlagert der Phasenfunktion ihrer Transformierten einen wellenzahlenproportionalen Phasenterm.</p>	$g(m + m_0, n + n_0) \text{ --- } \bullet \quad \mathbf{G}(k, l) e^{j2\pi \left(\frac{km_0}{M} + \frac{ln_0}{N} \right)} \quad (2-29)$
<p><i>Rotation</i> Die Rotation einer Ortsfunktion führt zu einer Rotation ihrer Transformierten um denselben Winkel.</p>	$\begin{aligned} m' = m \cos\alpha - n \sin\alpha & \quad k' = k \cos\alpha - l \sin\alpha \\ n' = m \sin\alpha + n \cos\alpha & \quad l' = k \sin\alpha + l \cos\alpha \end{aligned} \quad (2-30)$
<p><i>Scherung</i> Die Scherung einer Ortsfunktion (Verkippen nur einer Achse) führt zu einer Scherung der orthogonalen Achse im Transformationsbereich.</p>	$g\left(m + \frac{a}{N}n, n\right) \text{ --- } \bullet \quad \mathbf{G}\left(k, l - \frac{a}{M}k\right) \quad (2-31)$

2.5.2 Das 2D-Abtasttheorem

Bei allen vorangegangenen Betrachtungen wurde vorausgesetzt, dass sich die Ortsfunktion durch eine endliche, äquidistante, mehrdimensionale Folge diskreter Werte darstellen lässt. Zulässig ist dies, wenn das Abtasttheorem erfüllt ist:

- Die (kontinuierliche) Ortsfunktion ist *fini*t — bzw. es schneidet der Abbildungsprozess aus einer ausgedehnten Funktion einen in beiden Bilddimensionen *fini*ten Ausschnitt aus.
- Die Wellenzahl der kürzesten in der Ortsfunktion enthaltenen Wellenfunktion ist in beiden Dimensionen *kleiner als die halbe Wiederholrate der Abtastfolge* in der jeweiligen Dimension (“Abtastrate” Gl. (2–32), siehe auch Seite 41).

Mit den bisher genannten Theoremen lässt sich dies leicht plausibel machen: Wie eine finite Ortsfunktion bei Einführung einer periodischen Fortsetzung in ein diskretes Spektrum transformiert wird, so wird aus einer diskreten Ortsfunktion ein periodisch wiederholtes Spektrum (Symmetrie-Satz). Oder auch: Der Abtastvorgang kann als *Multiplikation* mit einer III -Funktion der Periode Δx bzw. Δy verstanden werden. Im Spektralbereich ergibt dies eine *Faltung* des Spektrums des kontinuierlichen Signals mit der Transformierten der III -Funktion, also einer III -Funktion der Periode $(1/\Delta x, 1/\Delta y)$.

Nur wenn das Spektrum auf das Intervall $\pm 1/\Delta x, \pm 1/\Delta y$ beschränkt ist, überlappen die Teilspektren der periodischen Wiederholung nicht und die Ortsfunktion kann korrekt rekonstruiert werden. Bei nichteingehaltener obiger Bedingung produziert die Überlappung Spektralanteile (“Alias-Frequenzen”), die bei einer Rücktransformation zu einer Signalverfälschung führen, Bild 2–15. Ein nachträgliches Ausfiltern ist gerade aufgrund der Überlappung nicht mehr möglich!

Diese Betrachtung weist auch den Weg zum Entwurf eines angemessenen Rekonstruktionsfilters: Da die Information über das finite Ortssignal gemäß

$$|f_x| < \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \tag{2-32}$$

$$|f_y| < \frac{1}{2 \cdot \Delta y}$$

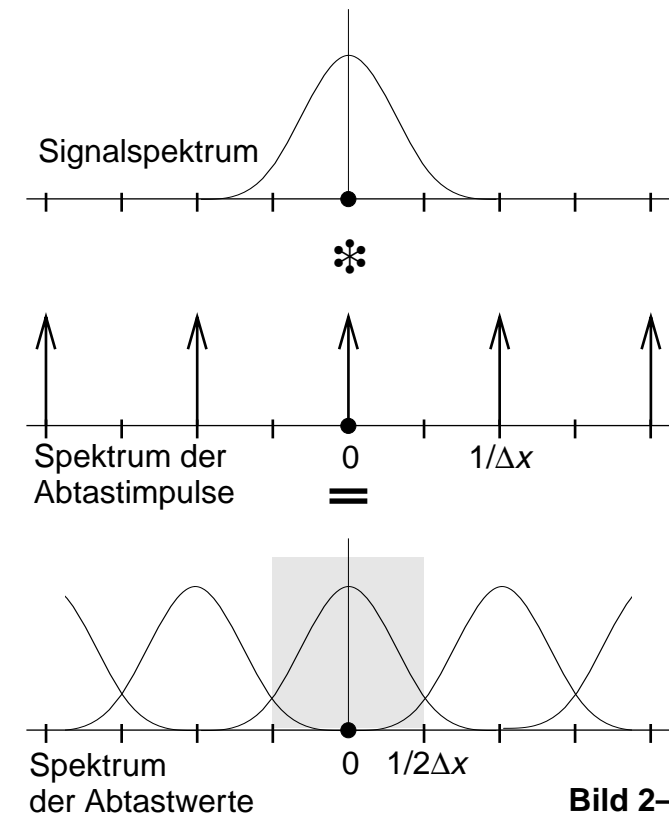
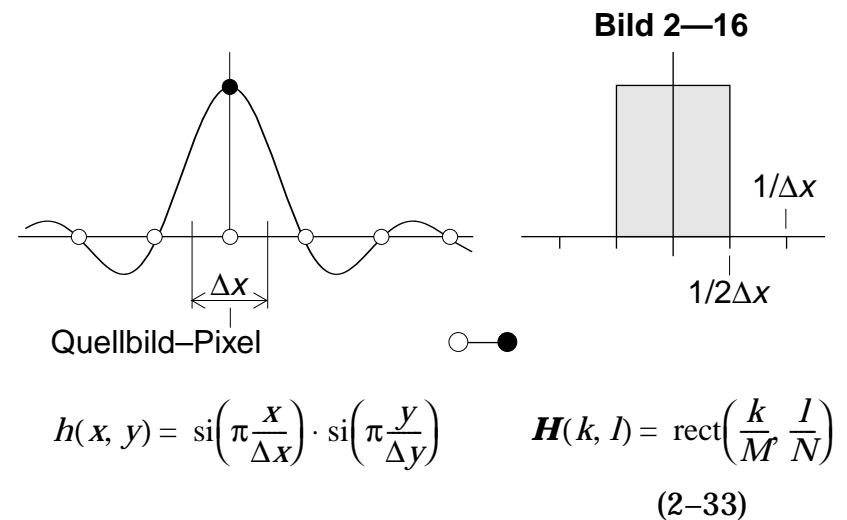


Bild 2–15

oberer Bedingung in dem spektralen Intervall $\pm 1/2\Delta x, \pm 1/2\Delta y$ ($\pm M/2, \pm N/2$) vollständig enthalten sein muss, muss das Rekonstruktionsfilter im Spektralbereich wie eine Maske wirken, die alle Spektralkomponenten außerhalb dieses Intervalls unterdrückt. Die OTF der gewünschten Filterfunktion ist daher eine zweidimensionale rect-Funktion (grau hinterlegte Fläche in Bild 2—15). Ihre Transformierte ergibt nach Gl. (2—19) auf Seite 42 eine zweidimensionale si-Funktion als PSF, Gl. (2—33) und Bild 2—16 links; man beachte hier die Anwendung des Symmetriesatzes! Mit dieser PSF, die periodische Nullstellen im Abstand des Abtastasters hat, ist die Abtastfunktion zu falten. (Da die si-Funktion infinit ist, wird man sie in der Praxis durch eine finite Interpolationsfunktion annähern. Gängig sind bi-lineare oder bi-kubische Interpolationen), siehe auch Seite 130.

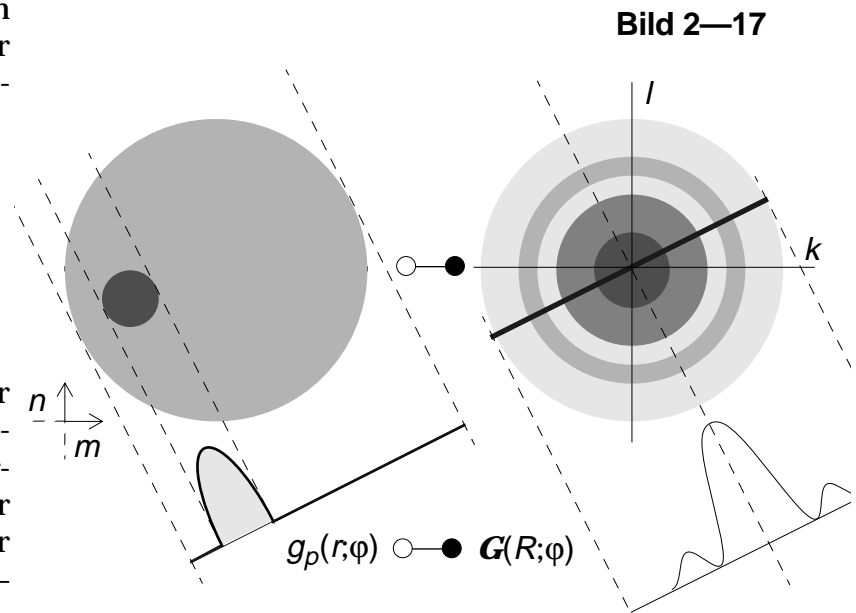


2.5.3 Zentralschnitt-Theorem

Mit dem Zentralschnitt-Theorem wird ein allgemeiner Ansatz geboten, um die Dimensionalität des Transformationsproblems zu reduzieren. Wir beschränken uns hier wiederum auf zweidimensionale Funktionen. Die Aussage des Theorems lautet in diesem Fall:

Ein *zentraler Schnitt* $G(R; \varphi)$ durch das 2D-Spektrum einer 2D-Ortsfunktion unter einem beliebigen Winkel ist mit der *eindimensionalen* Fourier-Transformierten einer *Projektion* $g_p(r; \varphi)$ durch die Ortsfunktion in Richtung der Schnittnormalen identisch, Bild 2—17.

Ein Zentralschnitt ist ein eindimensionaler, durch den Ursprung laufender *Ausschnitt* aus der Spektralebene, der als Multiplikation der Spektralfunktion mit einer δ -Linie beschrieben werden kann. Unter einer Projektion verstehen wir hier die Summation der Ortsfunktion entlang einer Schar paralleler Trajektorien. Führen wir im Ortsbereich die zu oben genannter Multiplikation korrespondierende Operation — eine Faltung mit einer δ -




Geraden, die senkrecht zum Zentralschnitt orientiert ist (siehe Seite 47) — durch, dann erhalten wir Gleichverteilungen auf allen zu dieser δ -Geraden parallelen Trajektorien. Ein Schnitt senkrecht hierzu an beliebigem Ort ist identisch mit der (eindimensionalen) Projektionsfunktion $g_p(r;\varphi)$.

Formal kann das Zentralschnitt-Theorem wie folgt erklärt werden: Die Rücktransformation des Spektrums einer Ortsfunktion, bei dem alle Koeffizienten außer $G(k,0)$ (die auf der k -Achse liegenden Koeffizienten) zu Null gesetzt sind, führt zu einer Gleichverteilung der ursprünglichen Ortsfunktion in n -Richtung. Die Abtastwerte auf einem beliebigen Schnitt parallel zur m -Achse sind daher arithmetische Mittelwerte in Spaltenrichtung. Wir können deshalb die resultierende Gleichverteilung auf eine eindimensionale Funktion abbilden, die als Parallelprojektion in der Darstellungsebene gedeutet werden kann. Nach Gl. (2-20) auf Seite 42 reduziert sich nun die Korrespondenz zwischen $g_p(m;n)$ und $G(k,0)$ auf eine eindimensionale Fourier-Transformation, Gl. Bild 2-7. Aus der Rotationsinvarianz der Fouriertransformation (siehe Seite 51) folgt, dass die Korrespondenz zwischen Projektionen und Zentralschnitt für alle Winkel gilt.

Eine wichtige Anwendung findet das Zentralschnitt-Theorem bei der Konzeption von Verfahren für die Schnittbild-Rekonstruktion aus Schichtbildern dreidimensionaler Objekte ("Computer-Tomographie", siehe Abschnitt 4.2 auf Seite 82). Die Kenntnis des Zentralschnitt-Theorems ist daneben nützlich für die Konstruktion der Transformaten insbesondere von Ortsfunktionen, deren Projektion trivial ist (d.h. es existiert eine Richtung, in der ihre partielle Ableitung Null ist), oder die rotationssymmetrisch sind, siehe Methode 3 auf Seite 44.

Nicht betrachtet wurde hier, dass bei der Rotation der Funktionen in diskreten kartesischen Funktionsräumen angemessene Interpolationsverfahren angewandt werden müssen.

$$G(k, 0) = \sum_m \left[\underbrace{\sum_n g(m, n)}_n \right] \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} \quad (2-34)$$



Projektion

$$g_p(m;n) = \sum_n g(m, n)$$

3 Zweidimensionale Bildsensoren

Um aus dem Resultat eines Abbildungsprozesses ein Bild entstehen zu lassen, bedarf es eines Mediums, auf dem (oder mit dessen Hilfe) eine visuelle Wahrnehmung der Abbildung geschaffen werden kann. Traditionelle Medien sind das Zeichenblatt, die Leinwand oder der photographische Film — zweidimensionale Informationsträger, die gleichermaßen auch Aufzeichnungsmedien sind. Aus entwicklungsgeschichtlicher Sicht ist der Abbildungsprozess in seinem Wesen daher eine Reduktion des *dreidimensionalen* dynamischen Objektraumes auf eine *zweidimensionale* stationäre Bildebene. Diesem Verständnis bleibt der Terminus "Bild" verhaftet, auch wenn wir mittlerweile signaltheoretisch drei- und vierdimensionale Signale als Bilder behandeln. So liefern auch die klassischen elektronischen Abbildungsverfahren zunächst nur zweidimensionale Bilder.

Die elektronische Bildtechnik hat die Identität des Aufzeichnungsmediums mit dem Wiedergabemedium aufgelöst und damit Freiräume für Erweiterungen und Verbesserungen des Abbildungsprozesses geschaffen. Mit der elektronischen Photographie, die den Film in der photographischen Kamera durch einen CCD-Sensor ersetzt, wird das Bild anstelle seiner Aufzeichnung auf einem Negativ- oder Diafilm auf einem *digitalen* Speichermedium zwischengespeichert. Ermöglicht wird damit bereits eine flexiblere Auswahl des Wiedergabemediums — Display oder Drucker — sowie eine direkte Zugänglichkeit des Bildsignals für eine digitale (Nach-) Verarbeitung. Eine entscheidendere Erweiterung liegt jedoch in der Anpassbarkeit des Bildsensors an die Abbildungsaufgabe: Die Möglichkeiten zur Auswahl des physikalischen Prinzips zur primären Signalerfassung, des Abbildungsverfahrens und der Technologie der Realisierung eröffnen ein breites Feld an problemspezifischen Lösungen.

3.1 Abbildung — ein Messproblem

Von *Bildsensoren* sprechen wir, weil die Erstellung einer Abbildung als ein Messvorgang aufgefasst werden kann. Dabei wird der Objektraum mittels Einzelsensoren oder Sensorarrays abgetastet. Jeder Einzelmessung bzw. jedem Sensorelement muss ein eindeutig eingrenzbarer Ausschnitt des Objektraums zugeordnet werden können, dessen Strahlungs-, Reflexions- oder Modulationseigenschaften das Messsignal bestimmen. So kann ein Abbildungsvorgang im allgemeinen in zwei Schritte aufgegliedert werden: (a) Umsetzung der abbildenden physikalischen Größe in eine elektrische Größe sowie (b) vorgeschaltete Abtastung des Objektraumes bzw. nachgeschaltete Abtastung des Bildraumes (siehe auch Seite 13).

Die Primärsignale für eine Abbildung eines dreidimensionalen Objekts oder einer dreidimensionalen Szene werden gewonnen, indem von einem Punkt außerhalb des für die Abbildung betrachteten Objektraumbereiches Messungen ortsabhängiger Objekteigenschaften vorgenommen werden. Jedem Messwert ist dabei ein Rauminkrement zugeordnet. Er repräsentiert die gemessene Eigenschaft gemittelt innerhalb dieses Rauminkrements. Messrichtungen für die primäre Signalerfassung eines Abbildungssystems bezeichnen wir als *Bildsensoren*. Für eine vollständige Erfassung des Objektraumes müssen sie die für die Abbildung relevante Objekteigenschaft (Materialkonstante, Struktur, Zustand ect.) sowohl *richtungs-* als auch *entfernungsselektiv* messen können.

Als Messmedien für eine berührungslose Abtastung des Objektraumes kommen Teilchenstrahlung, elektromagnetische Felder und Schallfelder in Betracht. Gemessen werden kann vom Objekt emittierte Eigenstrahlung (auch durch äußere Einwirkung stimulierte Emission), reflektierte Fremdstrahlung oder transmittierte Fremdstrahlung. Entsprechend werden der energetische Zustand (auch Konzentrationen emittierender Substanzen), Beschaffenheit und ggf. räumliche Orientierung von Oberflächen oder Absorptionseigenschaft gemessen und durch die Intensität des Mess-Signals

elektromagn. Wellen Teilchenstrahlg.	Hf Wärmestr. Röntgenstr. Mikrow. Licht γ -Strahlen
akustische Wellen	Ultraschall Infrarotschall
Fremdstrahlung • Reflexion • Transmission	Radar Auge Echographie Röntgen-Streustrahlen-CT Röntgen-Projektionstechn. Röntgen-CT
Eigenstrahlung • Emission • Stimulation	Thermographie Radio-Astronomie γ -Kamera Kernspintomographie

Bild 3—1

repräsentiert. Die Wellenlänge bestimmt die erreichbare Ortsauflösung und Reichweite (Eindringtiefe). Bild 3—1 zeigt eine systematische Übersicht.

Ein Bildsensor, der einen dreidimensionalen Objektraum vollständig abbilden soll, muss drei Forderungen erfüllen:

1. reproduzierbare Umsetzung der informationstragenden physikalischen Größe in ein elektrisches Signal,
2. Bestimmung und/oder Selektion des Raumwinkels und
3. Bestimmung oder Zuordnung der Entfernung für jeden inkrementellen Messwert.

Wird eine dieser Voraussetzungen nicht oder nicht vollständig erfüllt, resultiert daraus eine Unvollständigkeit der Abbildung. In der Tat war das Ziel für die Entwicklung von Bildsensoren zunächst auf die Erstellung von Bildern im traditionellen Sinn, d.h. die *zweidimensionale* Abbildung *dreidimensionaler* Realitäten gerichtet. So wird bei gängigen Bildsensoren im allgemeinen die Forderung 3 nicht erfüllt oder Forderung 2 nur teilerfüllt, wie an den folgenden Beispielen deutlich wird:

- Bildsensoren im inkohärent optischen Bereich (Vidicon, CCD-Kamera) wandeln über photoelektrische Effekte Lichtintensität in elektrische Signale um. Die Bestimmung der Raumrichtung der detektierten Strahlung erfolgt über eine fokussierende Optik ("Linsenauge") oder über einen Kollimator (schachtförmige Blendenanordnung, "Facettenauge"). Eine Entfernungsmessung ist nicht ohne zusätzliche Maßnahmen möglich. Das Ergebnis ist somit ein nur zweidimensionales Bild, im allgemeinen eine perspektivische Projektion (siehe Seite 19) von Oberflächeneigenschaften dreidimensionaler Objekte.
- Bildsensoren auf der Basis von Echoverfahren (Radar, Ultraschallbildung) senden mit Richtstrahlern (Richtantennen, akustische Linsen oder phasengesteuerte Arrays) gebündelte Impulse aus und empfangen die vom Objekt reflektierten Wellen, indem sie die Richtstrahler reziprok als Richtempfänger einsetzen. Über die Laufzeit wird der Abstand

der reflektierenden Grenzflächen oder Materialinhomogenitäten bestimmt. Wird der Richtstrahler nur um eine Achse geschwenkt, ist das Ergebnis ein fächerförmiger zweidimensionaler Schnitt durch den Objektraum.

- Bildsensoren, die mit durchdringender Strahlung arbeiten und Transmissions- bzw. Absorptionseigenschaften abbilden (Röntgenstrahlen, Elektronenstrahlen etc.) verwenden im allgemeinen punktförmige Quellen und flächenförmige Detektorfelder. Das Ergebnis sind zweidimensionale "Summationsbilder", d.h. abgebildet wird das Absorptionsintegral (Gln. (4-1) bis (4-3) auf Seite 82) über den Strahlenverlauf einer Zentralprojektion (siehe Seite 19).

Mit der exemplarischen Beschreibung einiger etablierter Bildsensortypen soll im folgenden ein kleiner Einblick in die Vielfalt der Technologien bzw. Techniken und ihre Besonderheiten gegeben werden:

Das *Vidicon* (Seite 59) ist der "Klassiker" unter den Bildsensoren für den lichteoptischen Bereich. Obwohl es inzwischen weitgehend durch den *CCD-Matrixsensor* (Seite 63) abgelöst worden ist, möchten wir es hier an erster Stelle behandeln — zum einen aus historischen Gründen: Die Entwicklung des Vidicons war ein entscheidender Meilenstein für die Etablierung der Fernsehtechnik; die Eigenart der Signalerzeugung hat sich in den auch heute noch geltenden Videosignal-Normen niedergeschlagen. Zum anderen verkörpert es das Grundprinzip einer zweidimensionalen Abtastung des dreidimensionalen Objektraums über ein latentes Zwischenbild.

Dass auch heute noch mechanisch bewegte Abtaster ihre speziellen Einsatzgebiete haben, soll mit dem *Scanning-Laser-Ophthalmoskop* (Seite 68) demonstriert werden.

Andere Wellenlängenbereiche fordern die Abkehr von der geometrischen Optik aus Linsen und Spiegeln. So wird bei Abbildungssystemen für γ -Strahlen wieder auf das älteste Abbildungsprinzip, das Facettenauge, zurückgegriffen (Seite 71).

Immer war es ein besonderes Anliegen der Bildtechnik, das mit dem Auge Undurchdringbare 'transparent' zu machen. Neben Röntgenstrahlen, die in ihrer klassischen Anwendung für Schattenprojektionen genutzt werden¹, hat die Echobilderzeugung mit Ultraschall in medizinischen und industriellen Anwendungen Verbreitung gefunden (Seite 72).

3.2 Das Vidicon

Das Prinzip des auf der Braunschen Röhre aufbauenden Vidicons wurde zuerst im Jahre 1921 beschrieben. Es war nach den allerersten Anfängen der Fernsehtechnik mit der Nipkow-Scheibe und mit rotierenden Spiegelab-tastern der erste aussichtsreiche Ansatz für einen Bildsensor ohne mecha-nisch bewegte Komponenten. Allerdings waren erst im Jahre 1950 die technologischen Voraussetzungen gegeben, um die Idee zur Entwick-lungsreife zu führen. In der Zwischenzeit kamen für die Fernsehstudioteknik Vorläufer des Vidicons — Ikonoskop, Zwischenbild-Ikonoskop, Orthicon und Zwischenbild-Orthicon — zum Einsatz.

3.2.1 Erzeugung eines Ladungszwischenbildes: physikalische Grundlage

Grundlage der Umsetzung von Bildeindrücken in elektrische Signale ist die Nutzung photoelektrischer Effekte: Beim *äußeren* photoelektrischen Effekt, der *Photoemission*, schlagen Photonen Elektronen aus der Oberfläche eines Festkörpers heraus. Durch die austretenden Elektronen wird die Oberfläche positiv geladen. Dieser Effekt wurde bei den oben genannten Vorläufern des Vidicons genutzt: Das Kamerabild wird auf eine Schicht aus photoemittierendem Material projiziert, die mosaikartig strukturiert ist. Photoemission

1. Die Abbildung mittels Röntgenstrahlen, insbesondere die Technik der 3D-Rekonstruktion, wird eingehend im Abschnitt 4.2 auf Seite 82 ff behandelt.

erzeugt auf ihrer Oberfläche ein Ladungsmuster. Periodisch wird ein Elektronenstrahl über die Oberfläche geführt ("scan"), der die Ladung wieder neutralisiert. Die dabei transportierte Ladungsmenge wird über einen Anodenwiderstand in die gewünschte Signalspannung umgewandelt.

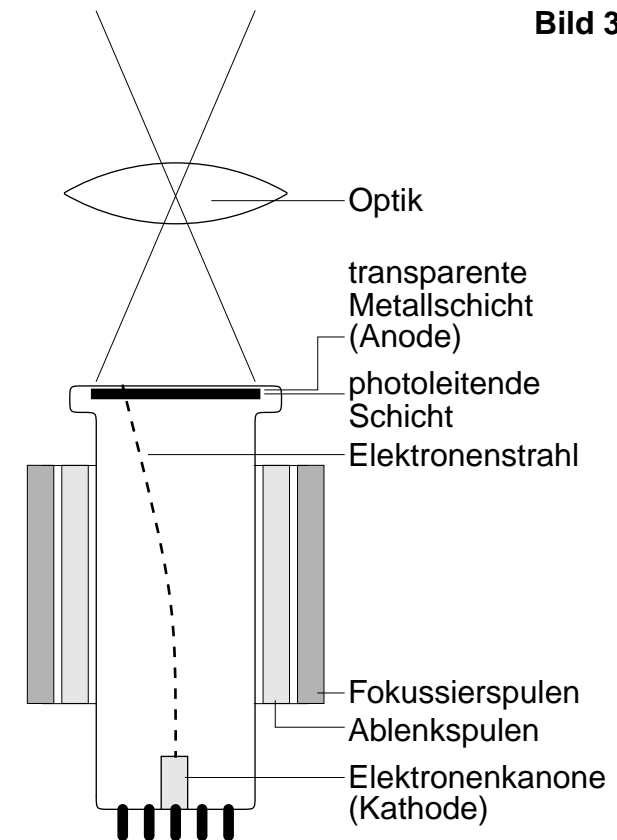
Das Vidicon dagegen nutzt den *inneren* photoelektrischen Effekt, die Photoleitung: Photonen erzeugen in dem photoleitenden Material Elektronen/Loch-Paare, die das intrinsisch nichtleitende Material leitfähig machen (dieser Effekt wird z.B. für den sogenannten Photowiderstand genutzt). Beim Vidicon wird die Frontfläche einer Braunschen Röhre zunächst mit einer transparenten Metallschicht bedampft. Darüber wird eine Schicht aus photoleitendem Material abgelagert — die sogenannte *signal plate*. Um eine laterale Leitfähigkeit zu unterbinden, wird die Schicht durch hochohmige Implantate zu einer Kondensatormatrix aus mikroskopischen Blöcken strukturiert. Das optische Bild wird durch die transparente vorderseitige Metall- elektrode hindurch auf die Photoleiterschicht projiziert (Bild 3—2).

Als amorphe Photoleitermaterialien werden bzw. wurden Antimontrisulfid, Bleioxid ("PlumbiconTM"), Cadmiumsulfid, Galliumphosphid oder Cadmiumselenid für Videokameras nach dem Vidicon-Prinzip eingesetzt. Darüberhin- aus wurden auch Vidicons auf der Basis von monokristallinen Silizium-p/n-Strukturen realisiert (die hier auftretenden Effekte werden bei der Beschreibung der CCD-Matrixsensoren auf Seite 64 behandelt).

3.2.2 Die Elektronenstrahl-Abtastung des Ladungsbildes

Die Metallschicht dient nun, auf positivem Potential liegend, als Anode für den die rückwärtige Oberfläche der Photoleiterschicht abtastenden Elektronenstrahl. Wird diese in einem Initialvorgang einmal vollständig abgetastet, dann hat sie näherungsweise das Nullpotential der Strahlkathode angenommen (der Elektronenstrahl stellt gleichsam eine bewegliche leitende Verbindung zwischen der Photoleiterschicht und der Kathode her).

Bild 3—2



Einfallendes Licht macht nun die Photoleiterschicht elektrisch leitfähig: Bei einer Quanteneffizienz von nahezu 100% erzeugt fast jedes einfallende Photon ein Ladungsträgerpaar, das die Oberflächenladung abbaut. Auf der rückwärtigen Oberfläche der Photoleiterschicht entsteht ein Ladungsbild: je heller das Bild, desto positiver das Potential. Wenn in dem folgenden Elektronenstrahldurchlauf das Oberflächenpotential wieder auf Null zurückgeführt wird, transportiert der Elektronenstrahl in einem Zeitintervall gerade die zwischen zwei Abtastdurchläufen auf dem entsprechenden Ortsintervall integrierte Ladungsmenge. Die Zeitfunktion des Strahlstroms ist damit ein Maß für die Ortsfunktion der eingefallenen Lichtmenge. Über einen in den Strahlstromkreis geschalteten Widerstand wird die Anodenstrommodulation in eine Signalspannung, das *Videosignal* umgesetzt.

3.2.3 Das Signalmodell des Vidicons

Das Videosignal ist ein analoges Signal, das die zweidimensionale Ortsfunktion des latenten Ladungsbildes (*eindimensional!*) im Zeitbereich darstellt. Die Transformation geschieht durch den Abtastvorgang des Elektronenstrahls, der die Abbildungsfläche auf der Halbleiterschicht in Zeilenrichtung überstreicht und dabei in Spaltenrichtung eine Ablenkung erfährt, die ihn nach jeder Zeile um einen Zeilenabstand (beim Halbbildverfahren um den zweifachen Zeilenabstand, siehe Fußnote auf Seite 63) verschiebt. Mittels eines nachgeschalteten, entsprechend schnell getasteten ADC wird aus dem analogen Signal ein in beiden Ortsdimensionen diskretes Digitalsignal.¹

Zur modellmäßigen Beschreibung des Abbildungsprozesses, die sowohl für die Auswertung des produzierten Bildes als auch für die Bewertung der

1. Für die Digitalisierung eines Standard-Videosignals (575 sichtbare Zeilen, 4:3-Seitenverhältnis, d.h. ca. 800 Pixel pro 52 μ s aktiver Zeilendauer) ist eine Abtastrate von ca. 15 MHz erforderlich.

Abbildungsqualität erforderlich ist, können die in Abschnitt 1 behandelten Modelle angewandt werden:

- Die Geometrie der Abbildung wird durch eine perspektivische Projektion nach Gl. (1–7) auf Seite 19 beschrieben.
- Der für die Amplitudenauflösung verantwortliche Signal/Rausch-Abstand wird durch Photonenrauschen (Abschnitt 1.2.3 auf Seite 26), durch spontan auftretende Elektronen/Loch-Paare in der Photoleiterschicht (Dunkelstrom) sowie durch thermisches Rauschen des Videoverstärkers bestimmt.
- Die Ortsauflösung wird durch eine PSF (Abschnitt 1.3.1 auf Seite 30) beschrieben, die sich aus der PSF der optischen Abbildung, der PSF der Elektronenstrahl-Abtastung¹ und, zusätzlich in Zeilenrichtung, der Impulsantwort der analogen Signalkette zusammensetzt.

Ein wichtiger, oft vernachlässigter Punkt ist die Behandlung des Abtastvorganges unter dem Aspekt der Erfüllung des Abtasttheorems (Abschnitt 2.5.2 auf Seite 52). Während die Abtastung in Zeilenrichtung erst im analogen Signalpfad vorgenommen wird, in dem die erforderliche Bandbegrenzung leicht durch elektronische Filter realisiert werden kann, erfolgt die Abtastung in Spaltenrichtung bereits durch den Elektronenstrahl auf der Ladungsspeicherschicht. Die erforderliche Bandbegrenzung kann also *nicht* mehr durch nachgeschaltete Filter vorgenommen werden! Bildsignalanteile mit Wellenzahlen oberhalb der halben durch den Zeilenabstand gegebenen Abtastrate müssen bereits durch eine geeignete Auslegung der PSF der optischen Abbildung unterdrückt werden.

Eine weitere Option für eine Bandbreitenbegrenzung, die der Erfüllung des Abtasttheorems entgegenkommt, bietet sich bei einer Halbbildabtastung im

1. Mit Vidicon-Prototypen wurde eine Ortsauflösung bis zu 10.000 Zeilen erzielt, siehe Schade O: Electron optics and signal read-out of high definition return-beam vidicon cameras, RCA Rev. 31, 60–119 (1972)

Bild 3—3

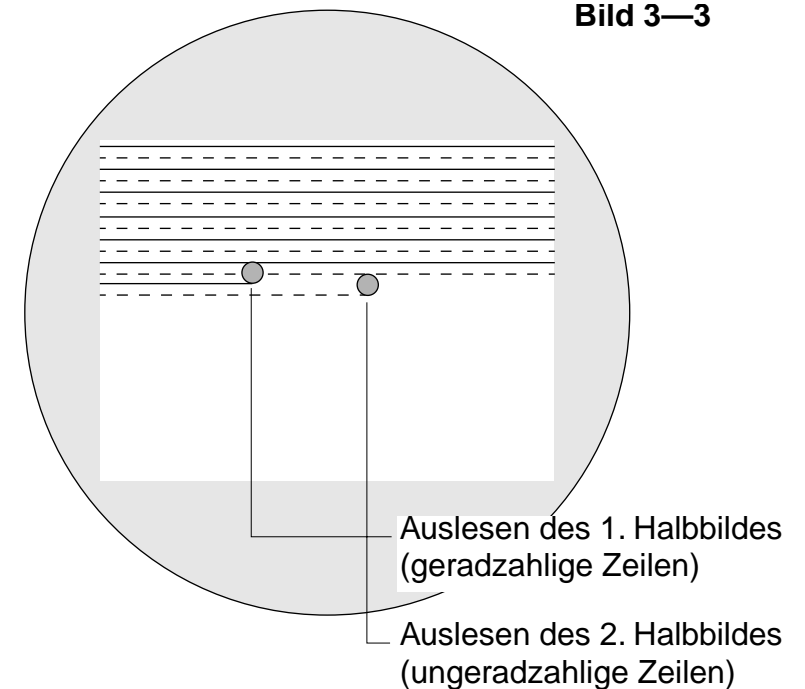
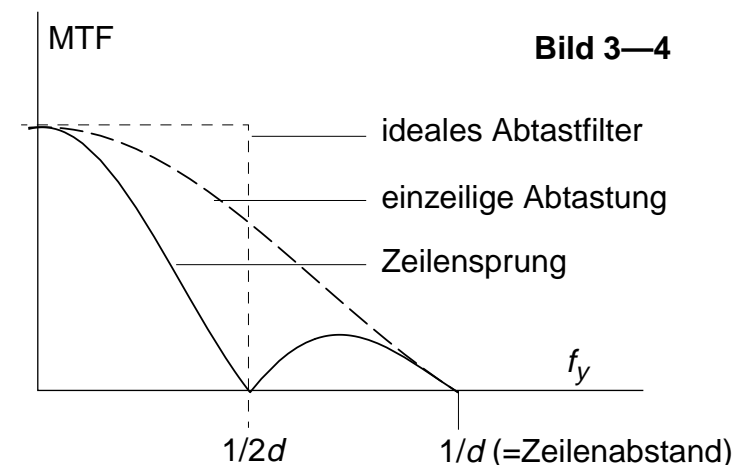


Bild 3—4



Zeilensprungverfahren¹: Wird der Elektronenstrahl auf mindestens den doppelten Zeilenabstand defokussiert, dann erfasst er nicht nur die Ladung der aktuellen Bildzeile sondern auch die der jeweils übersprungenen Nachbarzeile (Bild 3—3) — die Spaltfunktion erhält somit die doppelte Breite des Abtastintervalls. Ihre Transformierte, die *si*-Funktion, ist bereits eine grobe Annäherung an das ideale Tiefpassfilter (Bild 3—4).

3.3 Der CCD-Matrixsensor

Die VLSI-Technologie hat die Voraussetzungen geschaffen, anstelle des Elektronenstrahls eine mit der Detektorschicht integrierte Schaltungsstruktur zur Abtastung des Ladungs-Zwischenbildes einzusetzen. Der Ausgangspunkt ist wieder der innere photoelektrische Effekt, d.h. die Erzeugung freier Ladungsträgerpaare in einem photoleitenden Festkörper durch Photonen: Das aufzunehmende Bild wird auf die Oberfläche eines p-dotierten Siliziumchips aufbelichtet. Die Chipoberfläche ist mit einer SiO_2 -Isolierschicht abgedeckt, auf die eine in einer Matrixstruktur unterteilte transparente Metallschicht aufgedampft ist. Die Metallelektroden seien positiv geladen. Die durch die eindringenden Photonen erzeugten Elektronen/Loch-Paare lassen ein ortsdiskretes Ladungsbild entstehen. Die Ladung jedes dieser Matrixelemente repräsentiert den Helligkeitswert eines Pixels.

Es stellt sich jetzt die Aufgabe, alle diese Ladungspakete zu Spannungswerten umzusetzen und einmalig oder periodisch diskret auszulesen. Ein Auslesen über Zeilen- und Spaltenleitungen ähnlich der Ansteuerung eines RAM-Speicherbausteins ist möglich aber aufwendig, da an jedem Matrix-

-
1. Das Halbbildverfahren ("interlace scan") ist als Videostandard eingeführt. Bei einer Bilddarstellung mittels konventioneller CRT-Displays mit einer Bildwiederholrate von 25 Vollbildern pro Sekunde wird durch das Ineinanderschieben von zwei um einen Zeilenabstand versetzten Halbbildern eine stärkere Unterdrückung der Flickererscheinungen erzielt.

element eine Schaltung aus Steuer- und Schalttransistoren bzw. -dioden angebracht werden muss. Die derzeit weit verbreiteten Matrixsensoren verwenden deshalb für das Auslesen das CCD-Prinzip: Ein CCD — “charge coupled device” — ist ein *analoges* Schieberegister, das Ladungspakete nach dem Eimerkettenprinzip transportiert. Vorteilhaft ist, dass die Schieberegister-Elemente gleichzeitig Sensorelemente sein können. Daher ergeben sich sehr einfache und effizient zu realisierende Schaltungsstrukturen.

3.3.1 Der “Photogate”-Sensor

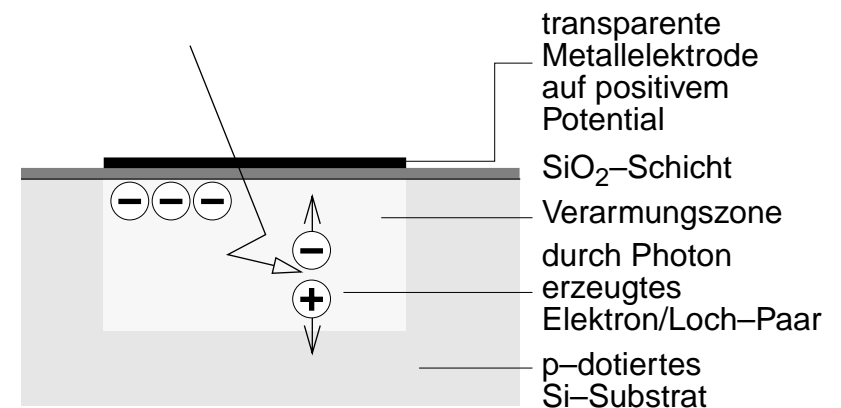
Bringt man, wie oben beschrieben, auf einem p-dotierten Siliziumchip eine isolierte transparente Metallelektrode an, dann erhält man einen MOS-Kondensator (MOS = metal oxide semiconductor), dessen eine Elektrode die Metallschicht, die Gegenelektrode das Substrat ist. Wird dieser Kondensator belichtet, werden durch die Photonen Elektronen/Loch-Paare im Halbleitermaterial induziert. Befindet sich die Metallelektrode auf einem positiven Potential, dann bildet sich unmittelbar unter der Isolierschicht eine Potentialsenke, in der sich die Photoelektronen sammeln. Die Löcher wandern in das Substrat ab (Bild 3—5). Bei einer für Kamerachips üblichen Abmessungen von etwa $8\mu\text{m} \cdot 8\mu\text{m}$ kann eine solche Zelle bis zu etwa 200.000 Elektronen speichern.

Da die Struktur dieses “Photokondensators” identisch mit der der Gate-Elektrode eines MOS-Transistors ist, wird dieses Element *Photogate* genannt. Gebräuchlich ist auch die Bezeichnung Photo-FET.

3.3.2 Das CCD-Schieberegister

Ein CCD-Schieberegister besteht aus einer Kette aneinander grenzender MOS-Kondensatoren mit jeweils voneinander separierten Gate-Elektroden. Durch die Folge der an die Gate-Elektroden angelegten Potentiale können

Bild 3—5



Zellen entweder voneinander isoliert werden (zwischen zwei Gate-Elektroden auf positivem Potential befinden sich Elektroden auf Null-Potential — Bild 3—6: t_n, t_{n+2}) oder ein Ladungsausgleich der Ladung benachbarter Zellen erreicht werden (Benachbarte Elektroden befinden sich auf demselben positiven Potential — Bild 3—6: t_{n+1}, t_{n+3}). Um den gewünschten Schiebeprozess zu realisieren, werden die Zellen zu Triaden mit drei Taktphasen so angesteuert, dass abwechselnd ein Vorrücken um eine Zelle und ein Sammeln der Ladung in voneinander isolierten Zellen erfolgt. Um Ladungsverluste während der Transferschritte zu minimieren wurden auch Vier-Phasen-CCDs realisiert.

Eine Besonderheit stellt das Zwei-Phasen-CCD dar: Durch Ionenimplantate an den Übergängen zwischen den Gate-Elektroden benachbarter Zellen, die versetzte Verarmungszonen schaffen, werden Potentialsenken auch ohne äußeres elektrisches Feld erzeugt. Sie stellen sogenannte virtuelle Elektroden dar. Werden die Gate-Elektroden paarweise mit einem Zwei-Phasen-Takt angesteuert, dann arbeitet die Struktur infolge der virtuellen Phase an den Verarmungszonen ähnlich wie ein Vier-Phasen-CCD (Bild 3—7).

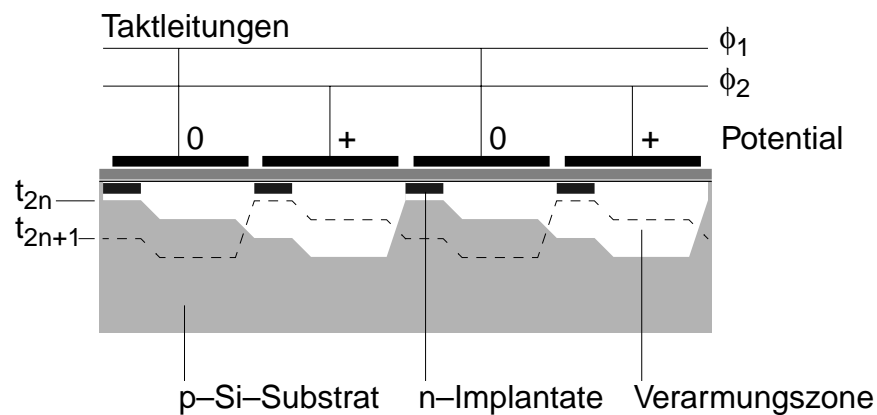


Bild 3—7

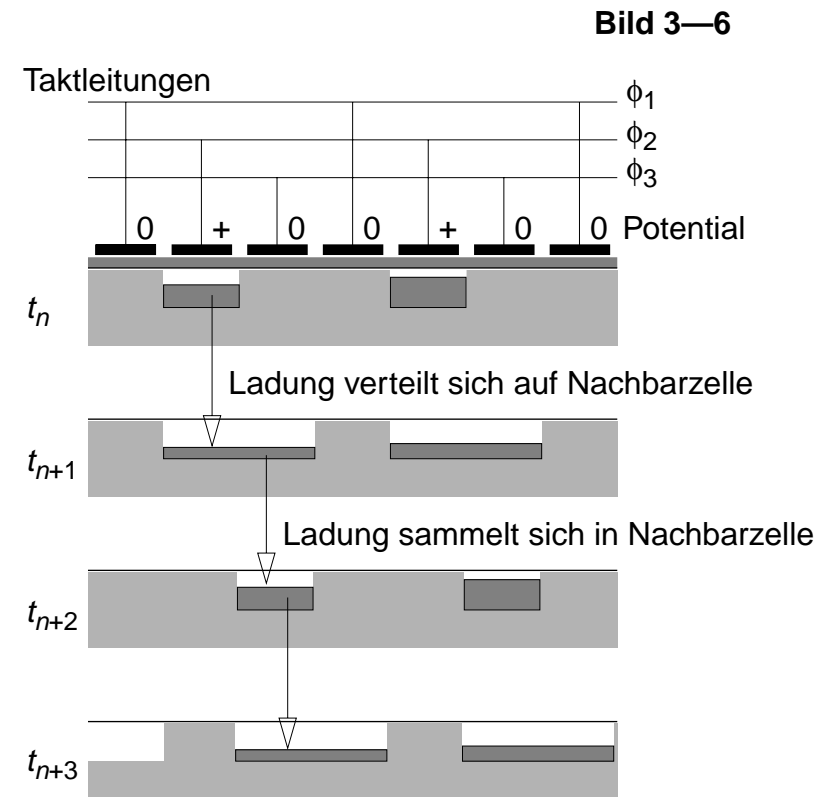


Bild 3—6

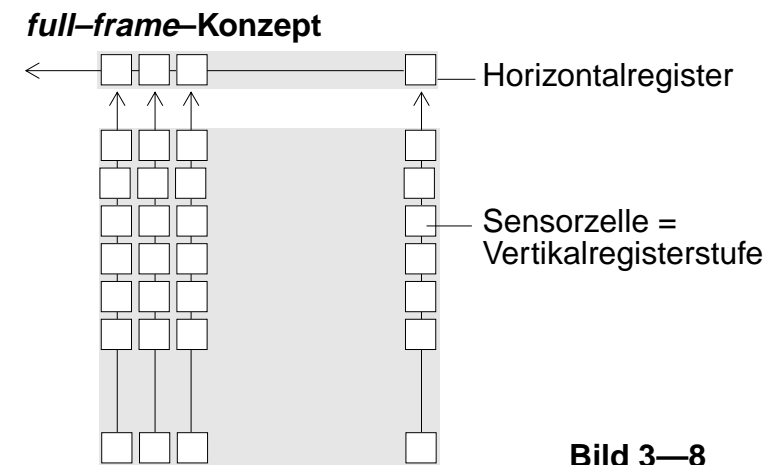
3.3.3 CCD-Auslesearchitektur

Die einfachste Architektur, das *full-frame*-Konzept nutzt die Möglichkeit, dass Sensorzellen und Schieberegisterzellen denselben Aufbau haben können. So lassen sich CCD-Schieberegister elegant mit der Sensorkondensator-Matrix kombinieren, indem die Sensorelemente gleichzeitig die Schieberegisterzellen bilden. Spaltenweise werden die Photogates zu CCD-Schieberegistern zusammengeschaltet, so dass das Ladungsmuster mit den Taktimpulsen spaltenweise vertikal aus der Matrix herausgeschoben werden kann. Alle Vertikalregister münden in ein die Matrix am oberen Rand abschließendes Horizontalregister. Nach jeder kompletten vertikalen Schiebetaktsequenz muss die Ladung aus dem Horizontalregister vollständig herausgeschoben werden. Der Ausgang des Horizontalregisters liefert jeweils eine komplette Bildzeile als Spannungsimpuls-Sequenz (Bild 3—8).

In vertikaler Richtung muss ein Pixel je nach dem realisierten Taktverfahren in zwei, drei oder vier Schieberegisterzellen unterteilt sein. Während der Belichtung können die zu einem Pixel gehörenden Teilzellen zusammen geschaltet werden, um die photosensitive Fläche zu maximieren.

Das *full-frame*-Konzept setzt voraus, dass die Belichtung der Sensormatrix innerhalb eines finiten Zeitintervalls erfolgt, über das die pro Pixel einfallende Lichtintensität integriert wird. Sobald der Auslesevorgang beginnt, darf keine weitere Belichtung mehr erfolgen, da das mit dem Schiebeprozess über die Sensormatrix wandernde Ladungsbild anderenfalls mit einem Bewegungsschleier überlagert würde. Wird ein *full-frame*-Sensor für Einzelaufnahmen eingesetzt, muss der Sensor mit einem Verschluss (*shutter*) versehen sein.¹

1. Als Behelf zur Vermeidung mechanisch bewegter oder kostspieliger elektrooptischer Komponenten wird in weniger kritischen Anwendungen die Auslesezeit gegenüber der Belichtungszeit kurz gehalten sowie ein Reset der gesamten Sensormatrix zu Beginn der Belichtungszeit durchgeführt (sogenannter „electronic shutter“).



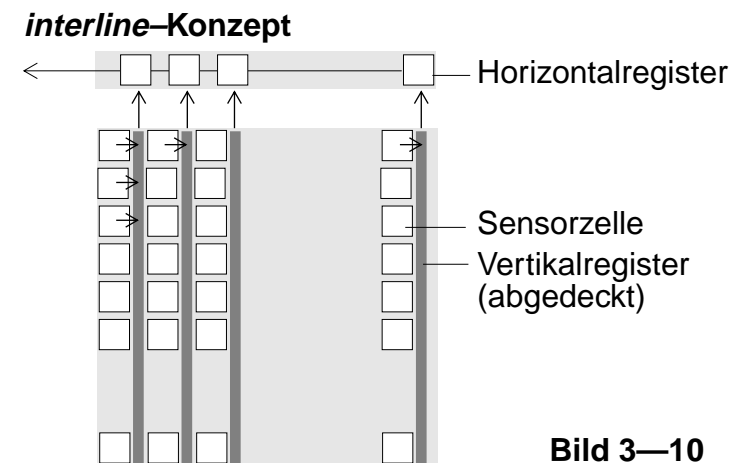
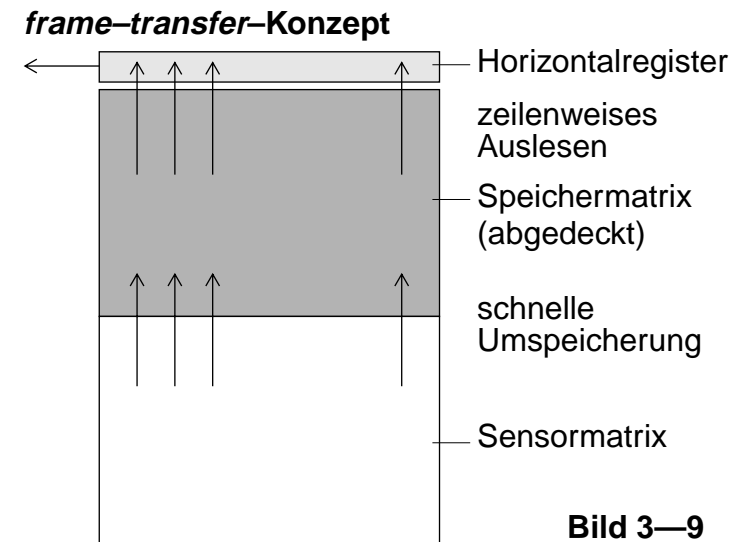
Bei Videokameras ist, dem Videosignal-Standard entsprechend, das Ausleseintervall mit der Bildwiederholzeit (bzw. Halbbildwiederholzeit) identisch. Bei einem *full-frame*-Sensor müsste während des vertikalen Schiebeprozesses bereits die erneute Belichtung der gesamten Sensormatrix erfolgen. Das Bild würde dabei vollständig verwischt werden.¹ Um bei einer periodischen Auslesung (weitgehend) verwischungsfreie Bilder gewinnen zu können, müssen zusätzliche Maßnahmen getroffen werden. Etabliert haben sich für CCD-Videokamerachips zwei unterschiedliche Architekturen für die Realisierung des Ausleseprozesses:

- das *frame-transfer*-Konzept, bei dem eine Zwischenspeichermatrix eingesetzt wird und damit die Sensorzellen weiterhin gleichzeitig als Schieberegisterzellen fungieren können, und
- das *interline*-Konzept, bei dem Sensorzellen und Schieberegisterzellen voneinander separiert sind.

Bei CCD-Videokamerachips nach dem *frame-transfer*-Konzept wird die Sensormatrix vertikal in einer optisch abgedeckten Speichermatrix von identischer Zellenzahl fortgesetzt. Innerhalb eines Transportvorganges, der kurz gegenüber der Halbbildwiederholzeit ist, wird der Inhalt der gesamten Sensormatrix in den Speicherbereich verschoben. Von dort aus kann die endgültige Auslesung in Spalten- und Zeilenrichtung ohne weitere Beeinträchtigung des Ladungsbildes erfolgen (Bild 3—9). Nachteilig bei diesem Verfahren ist der erheblich vergrößerte Chipflächenbedarf.

Beim *interline*-Konzept sind die Sensorelemente nicht mehr gleichzeitig Schieberegisterelemente. Statt dessen sind zwischen den Spalten der Sensormatrix jeweils separate CCD-Schieberegister eingefügt (Bild 3—10). Zur Bildwechselzeit wird die Ladung aus den Sensorelementen in die

1. Beim Vidicon trat dieser Effekt nicht auf, denn jeder Ort der Photoleiterschicht wird zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtastungen mit dem Elektronenstrahl genau ein Halb- bzw. Vollbildintervall lang belichtet.



Schieberegisterzellen transferiert. Damit sind Belichtungs- und Auslesevorgang optimal entkoppelt. Nachteilig sind bei diesem Konzept die höhere Komplexität, der größere Chipflächenbedarf sowie der geringere Flächenanteil an photosensitiver Fläche. Bild 3—11 zeigt einen 1024^2 -Pixel-Sensor mit *full-frame*-Architektur (oben) und einen $1928 \cdot 1048$ -Pixel-Sensor mit *interline*-Architektur (unten) der Firma Kodak.

Werden mit einem CCD-Matrixsensor Bildsequenzen nach dem Halbbildverfahren (CCIR-Standard) erzeugt, dann kann wie beim Vidicon das Zeilensprungverfahren mit der Verdopplung der Apertur in Spaltenrichtung kombiniert werden: Während der Belichtung der aufeinanderfolgenden Halbbilder wird die Zusammenschaltung benachbarter Schieberegisterzellen alternierend um eine Bildzeile versetzt. Bei der Anwendung der Zwei-Phasen-Technologie kann die Anzahl der Schieberegisterzellen in diesem Fall identisch mit der Zeilenzahl sein.

3.4 Konfokale Laserscanner

Experimentiert wurde bereits in der Frühzeit der Fernsehentwicklung mit Abtastsystemen, bei denen ein pixelgroßer Szenenausschnitt auf einen Photosensor fokussiert und mittels bewegter Spiegel sukzessiv über die abzubildende Szene geführt wurde oder alternativ das abzubildende Objekt ausschließlich mittels eines entsprechend abgelenkten Abtast-Lichtstrahles beleuchtet wurde. Die hierzu erforderliche schnell bewegliche Präzisionsmechanik machte die technische Realisierung jedoch aufwendig und schränkte ihre Tauglichkeit im praktischen Einsatz ein. Ansätze dieser Art wurden deshalb wieder aufgegeben, sobald die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Elektronenröhren-Kamerasysteme beherrscht wurden.

Wie nicht ungewöhnlich in der Technikentwicklung konnte seinerzeit dieses an sich interessante Abbildungsverfahren mangels geeigneter technologischer Möglichkeiten nicht angemessen realisiert werden. Mittlerweile erlebt

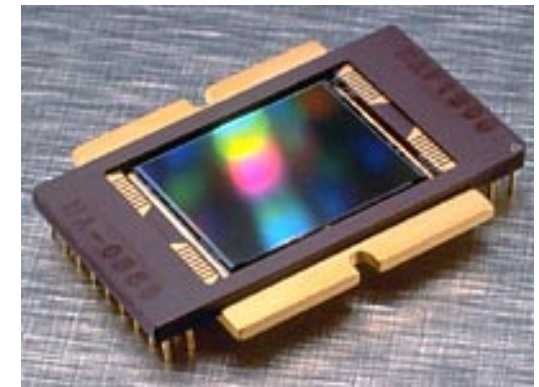
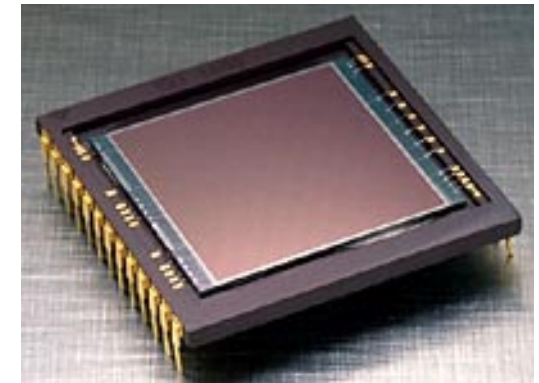


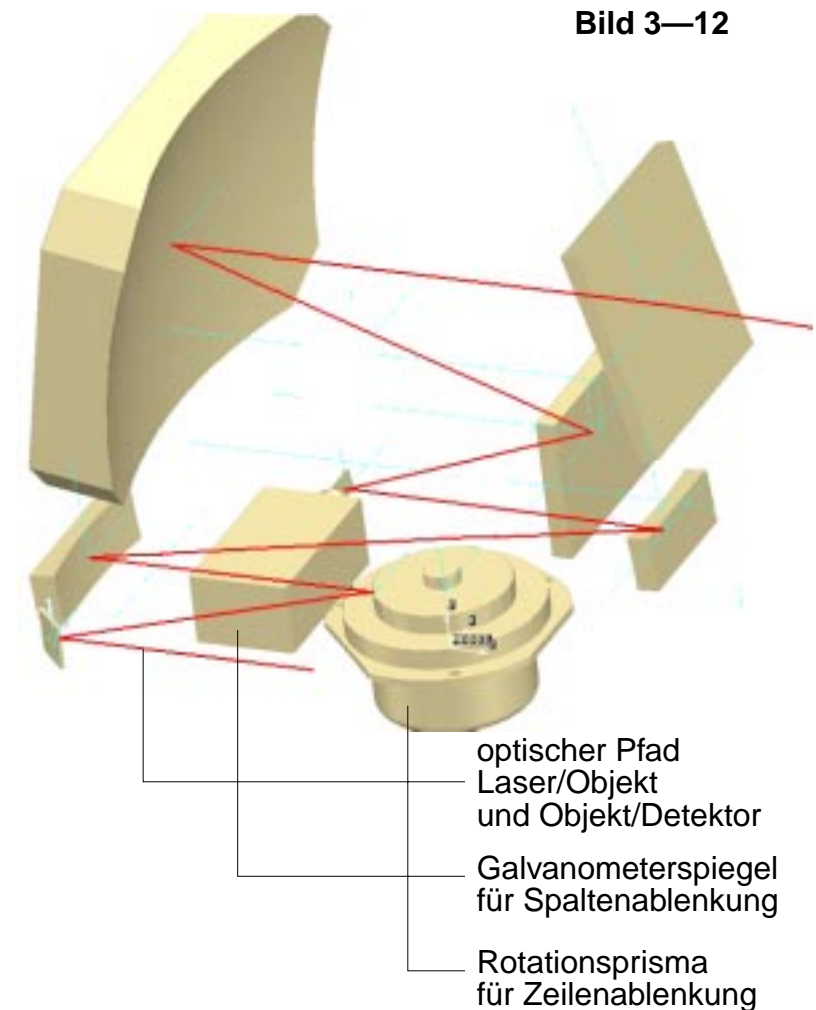
Bild 3—11

es unter Anwendung moderner Feinmechanik und Optik, insbesondere kombiniert mit einem Laser als Beleuchtungsquelle eine Renaissance. Das mechanisch-optische Abtastprinzip bietet nämlich für spezielle Abbildungszwecke einen interessanten Aspekt: Wird synchron mit der Abtastbewegung ein Laserstrahl mitgeführt, der jeweils nur den vom Sensor erfassten Ausschnitt der Objektoberfläche beleuchtet, dann wird Streulicht vom Objekt oder aus dem zwischen dem Abbildungssystem und dem Objekt befindlichen Medium auf ein Minimum reduziert (Analogie: Statt bei Dunkelheit im Nebel einen ungerichteten Strahler zu verwenden, wird die Szene mit einem stark gebündelten Spotlight abgeleuchtet). Die synchrone Führung des Laserstrahls mit dem Sensorfokus wird elegant realisiert indem der Strahl in den Strahlengang des Sensors eingeblendet und gegenläufig über denselben Weg geführt wird, also ebenfalls alle Fokussier- und Ablenkelemente durchläuft — das Prinzip der *konfokalen* Abbildung.

Anwendungen findet dieses Abbildungsprinzip unter anderem als Abtastmikroskop sowie in einem speziell für die Augenheilkunde entwickelten Abbildungssystem, dem *Scanning-Laser-Ophthalmoskop* (SLO). An letzterem soll das Prinzip beispielhaft erläutert werden.

Das SLO wurde geschaffen, um den Augenhintergrund (*fundus*) darzustellen. Die Fundusdarstellung wird in der Augenheilkunde zur Untersuchung der Netzhaut (*retina*) eingesetzt. Mit einer Bildsequenzdarstellung können, wenn die retinalen Blutgefäße gleichzeitig von einem fluoreszierenden Kontrastmittel durchflossen werden, hämodynamische Vorgänge analysiert werden. Da der Strahlengang zweimal die Augenlinse sowie den vor der Netzhaut liegenden Glaskörper passieren muss, bringt die streustrahlmindernde konfokale Abbildung hier entscheidende Vorteile.

Um eine für die Aufzeichnung dynamischer Vorgänge ausreichend hohe Bildwiederholrate zu erzielen, wird der Abtaststrahl zeilenweise mittels eines sehr trägheitsarmen Galvanometerspiegel oder — wie in dem in Bild 3—12 skizzierten optischen Aufbau des SLO der Firma Rodenstock — über ein



Rotationsprisma abgelenkt. Die weniger zeitkritische Ablenkung in Spaltenrichtung erfolgt in beiden Fällen über einen Galvanometerspiegel. Mit dem Rotationsspiegel kann eine Zeilenfrequenz von 16 kHz (Video-Standard 50 Halbbilder/sec) erreicht werden. Galvanometerspiegel sind derzeit auf eine Zeilenfrequenz von ca. 8 kHz begrenzt.

Das Gerät der Firma Rodenstock erreicht eine Ortsauflösung von ca. 10 μm auf der Netzhaut bei einem Öffnungswinkel von 20°. Damit können auch kapillare Blutgefäße abgebildet werden. Bild 3—13 stellt die *fovea*, die Zone der höchsten Sehschärfe nach Füllung mit dem Kontrastmittel Fluoreszin dar. Als ein weiteres Aufnahmebeispiel ist in Bild 2—14 auf Seite 49 bzw. Bild 5—18 auf Seite 112 ein 40°-Bereich der Netzhaut dargestellt. Bild 3—14 zeigt das Gerät im Einsatz in der Augenklinik des Universitätsklinikums Aachen.

Bei der Abbildung bewegter Objekte gilt ein spezieller Aspekt den für das jeweilige Abbildungssystem typischen Bewegungsartefakten. Sie sind grundsätzlich die Folge einer zeitlichen Unterabtastung (bei der Fundusdarstellung besonders durch die unwillkürlichen Sakkaden des Augapfels verursacht, die den Bildinhalt während eines Bildwechsels ruckartig um bis zu einer halben Bildbreite verschieben können). Während bei Abbildungssystemen, die über ein Halb- oder Vollbildintervall integrieren (Filmkamera, Vidicon, CCD-Matrixsensor), Objektbewegungen zu Verwischungs-Artefakten („Bewegungs-Unschärfe“) führen, reagieren Abtastsysteme ohne Speichereigenschaft mit geometrischen Verzerrungen, denn hier überlagert sich die Bewegung des Objektes der Abtastbewegung. So führt eine Objektbewegung in Zeilenrichtung zu einer parallelogrammartigen Verkipfung des Objekts, da sich das Objekt von Zeile zu Zeile mit oder gegen die Zeilenabtastung verschiebt. Bei einer Bewegung in Spaltenrichtung wird das Objekt in Bewegungsrichtung gedehnt (wenn sich das Objekt mit dem Spaltenvorschub verschiebt) oder gestaucht (wenn sich das Objekt dem Spaltenvorschub entgegen bewegt).

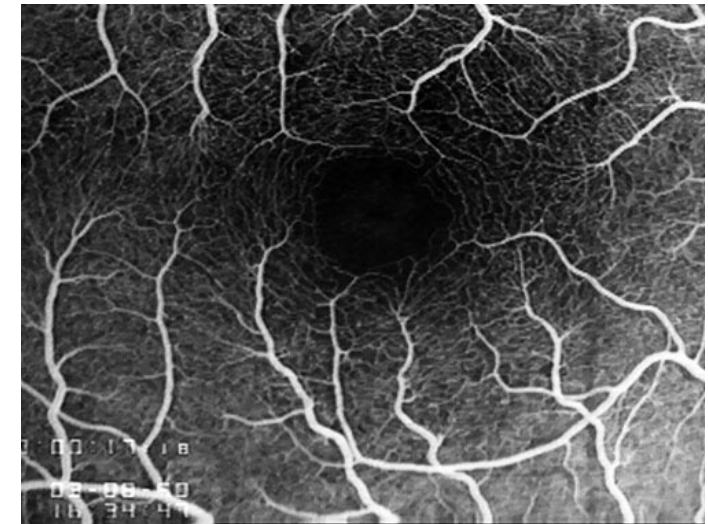


Bild 3—13

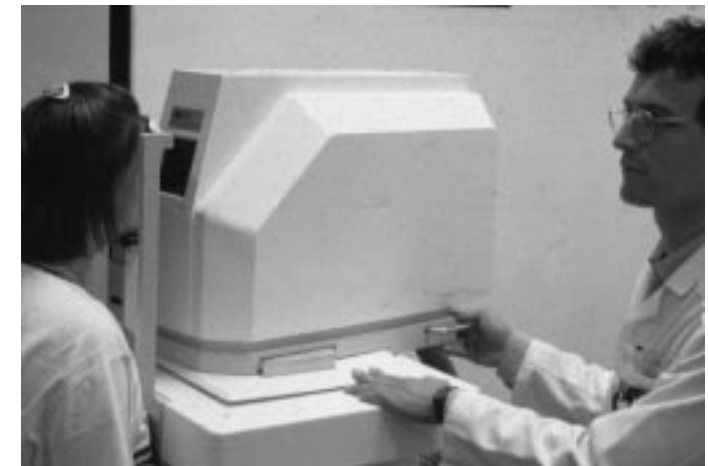


Bild 3—14

3.5 Die Gammakamera

In der *Nuklearmedizin* wird die Stoffwechsel-Funktion innerer Organe untersucht, indem die örtliche Verteilung einer der für die Organfunktion typischen Substanzen (z.B. Jod in der Schilddrüse) abgebildet wird. Die Substanzen werden dazu mit radioaktiv markierten, (bio-) chemisch gleichwertigen Stoffen versetzt (z.B. Jod-Isotop ^{123}I). Die Abbildungsaufgabe besteht hier darin, die Ortsverteilung äußerst schwacher γ -Strahlenquellen zu messen.

Hochenergetische, d.h. extrem kurzwellige Strahlung kann nicht mittels Linsen- oder Spiegeloptiken fokussiert werden. Hier gelingt eine Abbildung — d.h. die Zuordnung der Position der detektierten Quanten in der Bildebene zu determinierten Volumenelementen des Objektraums —, indem das Prinzip des evolutionsmäßig frühesten Auges, des Facettenauges der Insekten aufgegriffen wird: Eine Matrix von dicht nebeneinander liegenden Bohrungen in einer Platte aus einem hoch-absorbierenden Material (Blei oder Wolfram) — der sogenannte *Kollimator* — lässt auf die Flächenelemente der hinter der Platte angeordneten Detektorebene jeweils nur Quanten aus einem engen Raumwinkelbereich fallen, Bild 3—15. Sind die Bohrkanäle im einfachsten Fall parallel zueinander ausgerichtet (*Parallel-Kollimator*), kann die Abbildung des vor dem Kollimator befindlichen Objektraums auf die Detektorebene als orthographische Parallelprojektion (Bild 1—2 auf Seite 18) modelliert werden.

Die Detektion der durch den Kollimator einfallenden Quanten erfolgt in zwei Schritten: In einer *Szintillator*platte erzeugt ein hochenergetisches γ -Quant eine Anzahl niederenergetischer Lichtquanten (Photonen)¹; diese werden im folgenden Schritt mittels Photosensoren in elektrische Signale umgesetzt.

1. Ein γ -Quant von beispielsweise 140 keV erzeugt 5.000...10.000 Photonen. Die Intensität eines solchen Lichtblitzes lässt einen Rückschluss auf die Energie des im Szintillator absorbierten γ -Quants zu.

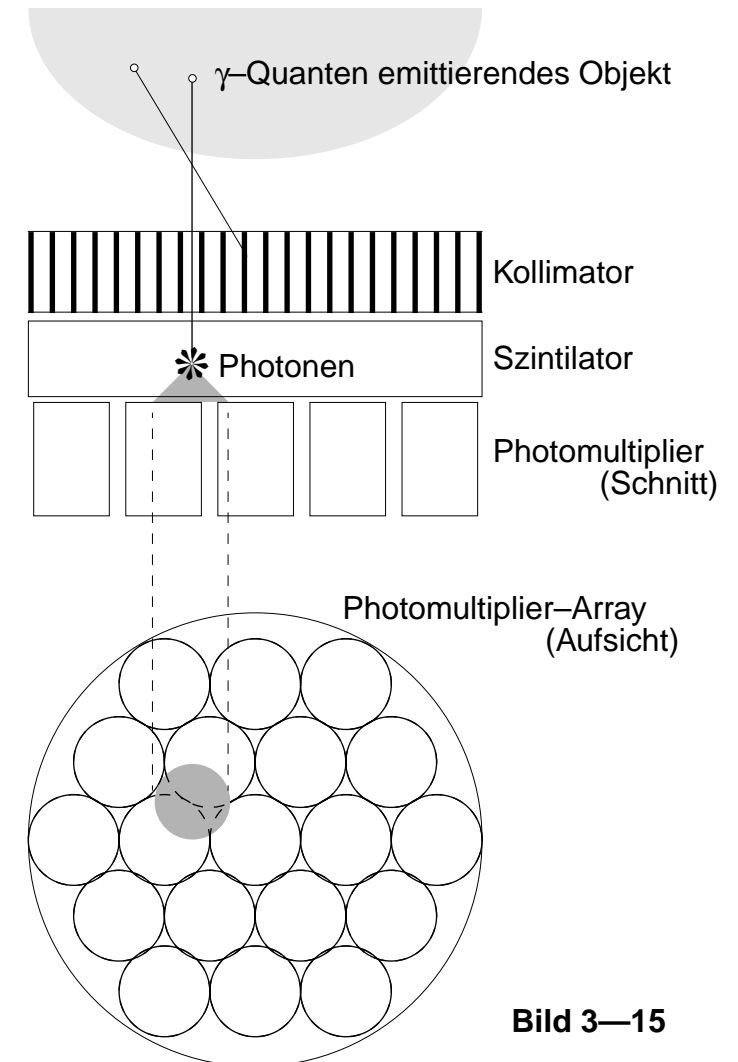


Bild 3—15

Ein in der Nuklearmedizin etabliertes Szintillatormaterial ist Tellur-dotiertes Natrium-Jodid. γ -Quanten erzeugen in dem NaI-Kristall Elektronen-Loch-Paare, die nach kurzer Laufstrecke an Kristallfehlstellen eingefangen werden. Ihre Energie von ca. 3 eV wird als blau-violettes Licht (Wellenlänge 420 nm) abgestrahlt.

Damit mit geringstmöglicher Konzentrationen der biologisch unverträglichen radioaktiven Tracer-Substanzen gearbeitet werden kann, muss der Detektor jedes eintreffende Quant als Einzelereignis registrieren können. Überdies soll nicht nur das Auftreten eines durch das γ -Quant induzierten Lichtimpulses, sondern auch dessen Impulshöhe ausgewertet werden, um über eine Energieselektion Nutzstrahlung von Hintergrundstrahlung trennen zu können. Höchstempfindliche Photodetektoren sind dazu notwendig. Etablierte Gammakamera-Systeme arbeiten mit einer Hexagonalmatrix aus Photovervielfacher-Röhren (*photo-multiplier tube*, PMT).

Da die von eintreffenden Quanten erzeugten Lichtblitze mit einer sehr schnellen Signalverarbeitung als Einzelereignisse individuell ausgewertet werden, kann der Ereignisort aus den Signalen benachbarter PMTs mittels Schwerpunktbestimmung um ein Vielfaches höher auflösend ermittelt werden, als es dem Rasterabstand der PMTs entspräche (Prinzip der "Subpixel-Auflösung"). Hexagonalraaster aus 37 PMTs haben sich als brauchbar erwiesen, um aussagekräftige Bilder zu erzeugen.

3.6 Ultraschall-Scanner

Abbildungen grundsätzlich anderer Natur werden erzielt, wenn anstelle elektromagnetischer Wellen Schallwellen verwandt werden. Schallwellen sind mechanische Wellen. Sie können sich nur in Materie ausbreiten. Sie erfahren analog zu optischen Wellen Brechung und Reflexion, wenn sie auf Grenzflächen zwischen Medien unterschiedlicher Schallimpedanz auftreffen. Die Schallimpedanz Z_0 eines Mediums (der akustische Brechungsindex) ist



Bild 3—16

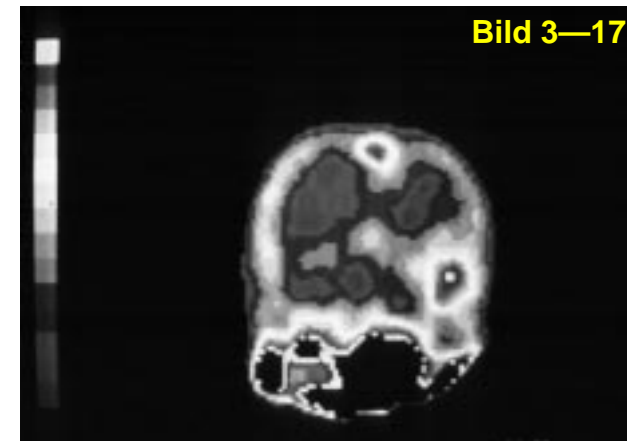


Bild 3—17

proportional zur Schallgeschwindigkeit c in dem Medium. In Flüssigkeiten ist die Schallgeschwindigkeit durch den Elastitätsmodul E und die Dichte ρ gemäß Gl. (3-1) gegeben.

$$Z_0 = \rho \cdot c \quad (3-1)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sowohl in der medizinischen Diagnostik als auch in der Werkstoffprüfung werden Abbildungsverfahren eingesetzt, die auf dem Echolot-Prinzip beruhen: Von einem Schallsender werden Schallimpulse in das zu untersuchende Objekt eingekoppelt. Aus der Verzögerungszeit bis zum Eintreffen von Echos wird die Entfernung rückstreuender Objektstrukturen ermittelt. Durch eine scharf bündelnde Sende- und Empfangscharakteristik werden die Echos ortsselektiv entlang des Sendestrahles gemessen — der sogenannte *A-Scan*.

Von der Wellenlänge hängt einerseits die erreichbare Ortsauflösung ab: Je kürzer die Wellenlänge, je höher also die Frequenz, desto präziser kann die Echolautzeit aufgelöst werden (*radiale* Auflösung). Gleichzeitig kann mit abnehmenden Wellenlängen auch der Durchmesser der Strahlkeule verringert werden (*laterale* Auflösung). Andererseits wird mit zunehmender Frequenz die Eindringtiefe geringer. In der Medizin sind Schallfrequenzen im Bereich 2...50 MHz gebräuchlich¹. Mit Schallfrequenzen von 5...10 MHz erreicht man bei einer Ortsauflösung um 1 mm die für die Untersuchung des menschlichen Körpers gewünschte Eindringtiefe von 10...20 cm. Mit höheren Schallfrequenzen ist man auf oberflächennahe Strukturen beschränkt

Als Sender der Ultraschallimpulse dienen elektro-mechanische Wandler auf der Basis des Piezoeffektes. Das Schallfeld eines zylindrisch geformten Dikenschwingers (sogenannter Kolbenschwinger) mit planer Abstrahlfläche kann in Nahfeld (Fresnel-Zone) und Fernfeld unterteilt werden. Das Nahfeld ist durch starke Interferenzen gekennzeichnet. Im Fernfeld nimmt die Intensität kontinuierlich ab, während sich die Strahlbreite proportional erhöht (Bild 3-18 oben).

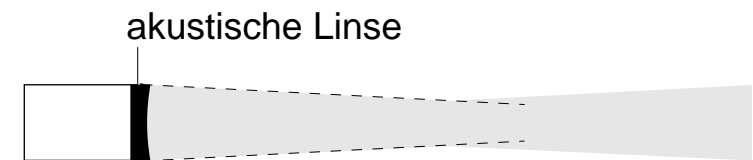
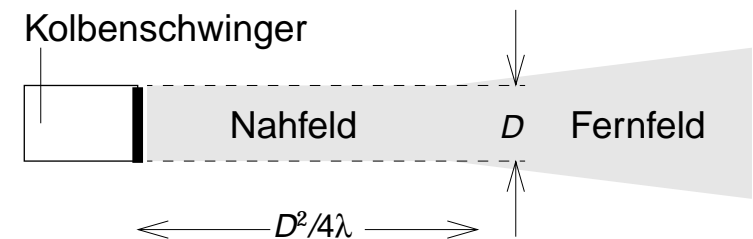


Bild 3-18

1. Bei Frequenzen jenseits der Hörbarkeitsgrenze von ca. 20 kHz spricht man üblicherweise von *Ultraschall*.

Aufgrund der Reziprozität des Piezoeffektes kann ein piezokeramischer Schwinger ebenso als Ultraschallmikrofon dienen, so dass Abstrahlung des Ultraschallimpulses und Empfang des Echos nacheinander mit demselben Element — dem *Ultraschall-Transducer* — erfolgen können.

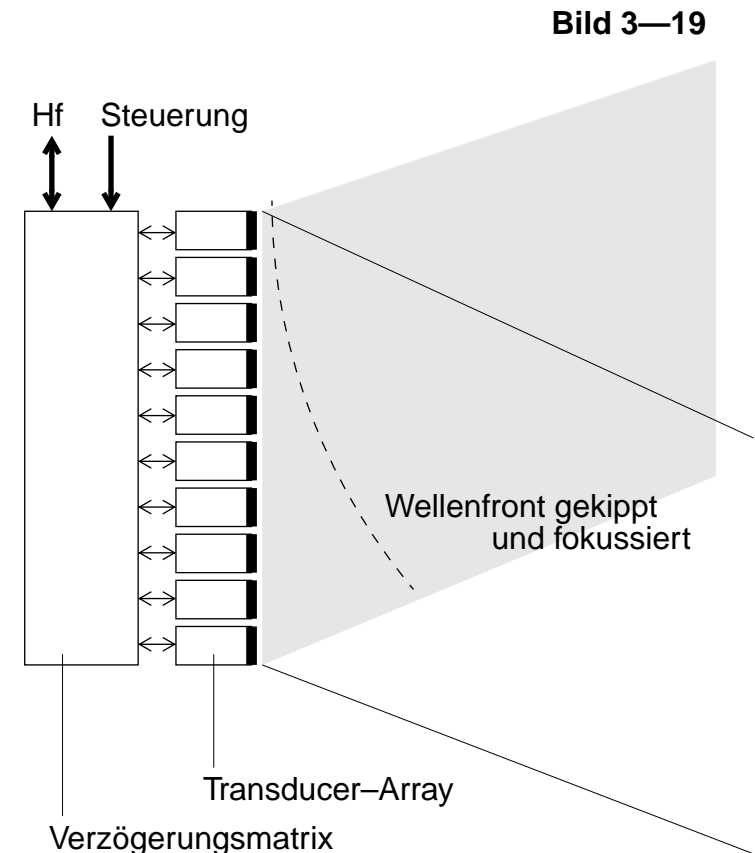
Zur Erhöhung der lateralen Auflösung wird zwischen Transducer und Objekt eine akustische Linse eingefügt, die die Strahlbündelung verbessert (Bild 3—18 unten). Damit wird der Rückstrahlquerschnitt reduziert und gleichzeitig die Richtungsselektion beim Empfang der Echos erhöht.

Um einen Schnitt durch das Objekt abzubilden, wird der Transducer geschwenkt, so dass der Sendestrahл einen fächerförmigen Sektor innerhalb einer Objektschicht überstreicht. Die Echos werden als Grauwertmodulation in die Bildebene, d.h. in den Bildspeicher eingetragen — der sog. *B-Scan*.

Der Scan über den gewünschten Winkelsektor kann mechanisch durch eine Pendelbewegung oder durch eine Rotation des Transducers erfolgen. Neuere Ultraschall-Scanner erzielen das Schwenken des Strahls ohne mechanische Bewegung, indem ein Zeilenarray aus Transducerelementen nach dem Prinzip der *phased-array*-Antennen angesteuert wird: Über steuerbare Verzögerungsglieder wird die Front der sich ablösenden Welle entsprechend der gewünschten Strahlrichtung gekippt.

Gleichzeitig kann auch die Strahlfokussierung anstatt durch eine gewölbte Transduceroberfläche, die analog zu einer geometrischen Optik wirkt, nach dem *phased-array*-Prinzip erfolgen. Die sich ablösende Wellenfront ist dann nicht nur um den Strahlwinkel gekippt sondern zusätzlich konkav gewölbt (Bild 3—19).

Zusätzlich bietet ein *phase-array*-Transducer die Möglichkeit der *dynamischen Fokussierung* während des Echoempfangs: Da die Entfernung der reflektierenden Objektstrukturen streng mit der Laufzeit korreliert, kann die Einschnürung der Empfangskeule (der Bereich der besten lateralen Auflösung) dem Echo folgen.



Mit linearen Transducerarrays von entsprechender Breite kann auch eine Parallelstrahl-Abtastung realisiert werden. Bild 3—20 zeigt einen solchen Transducer im Einsatz (Werkbild Philips).

Für die Interpretation echographischer Ultraschallbilder ist es wichtig, die Ursachen für eine Reflexion oder Rückstreuung der Schallwelle zu kennen. Deutliche Echos gehen von Grenzflächen aus, an denen sich die akustische Impedanz stark ändert¹. In der Materialprüfung sind dies z.B. Risse oder Einschlüsse in Gussstücken oder Defekte in Schweißnähten ("Ungängen"), während homogene Bereiche des Objektes keine Rückstreuung erzeugen. In der medizinisch-diagnostischen Anwendung erfolgt nahezu Totalreflexion an Knochenoberflächen und an Wandungen gasgefüllter Hohlräume (z.B. intrakorporale Darmgase). Dadurch werden dahinter liegende Bereiche abgeschattet. So müssen beispielsweise für die *transthorakale* Abbildung des Herzens spezielle Rippenfenster gesucht werden. Ohne jegliche Rippenschatten kann das Herz *transösophageal*, d.h. mit einem in die Speiseröhre eingeführten Sektorscanner aufgenommen werden, Bild 3—21.

Rückstreuung erfolgt auch durch Streuprozesse an Inhomogenitäten, die klein gegenüber der Wellenlänge sind. Von Bedeutung für die durch Streuung verursachten Bildmuster sind mittlerer Abstand und räumliche Verteilung der Streuzentren. Differenziert werden kann auf dieser Basis zwischen Gewebe und flüssigkeitsgefüllten Hohlräumen, mit starken Einschränkungen gegebenenfalls auch zwischen unterschiedlichen Gewebetypen.

Eine unvermeidliche Störkomponente stellt das sogenannte *Speckle*-Rauschen dar: Wie im Bereich der kohärenten Optik führt auch die Kohärenz der Ultraschallwellen mit ihren quasi-periodischen Auslöschungen zu störenden Mustern, die das Bild überlagern und die Interpretation erschweren.

-
1. In jedem Fall muss dafür Sorge getragen werden, dass der Transducer möglichst ohne Impedanzsprung an das Objekt angekoppelt wird. Luftspalte, die starke Störechos erzeugen würden, können durch eine Gelschicht vermieden werden.



Bild 3—20

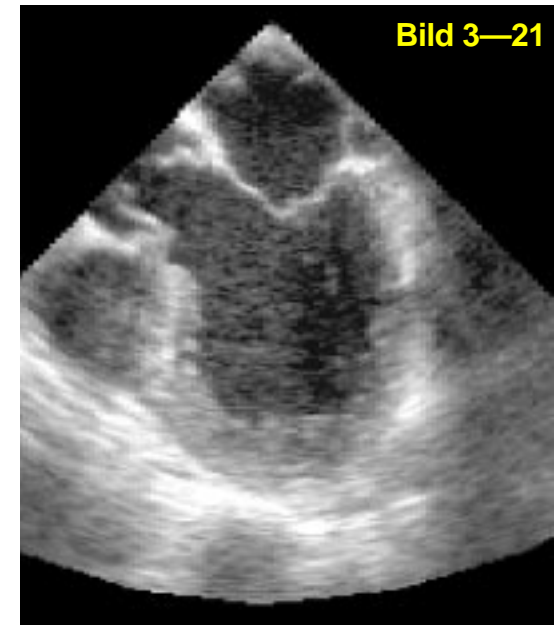


Bild 3—21

4 Die 3D-Rekonstruktion aus Projektionen

4.1 Dreidimensionale Abbildung — räumliches Sehen

Unsere Welt ist dreidimensional. Bilder sollen diese Welt ausschnittsweise beschreiben, d.h. Objekte in ihrem Äußeren, ihrer Konstellation zueinander und ihrem (inneren) Aufbau in den drei Raumdimensionen möglichst nahe an der erfahrbaren Realität abbilden.¹

Dass unter einem Bild — dem Abbild eines Ausschnitts aus der dreidimensionalen Welt — im allgemeinen eine *zweidimensionale* Repräsentation verstanden wird, ist wenig erstaunlich, wenn wir uns die Entwicklungen der Bilddarstellung sowohl in der Kunst als auch in der Technik vergegenwärtigen. Bemerkenswert ist aber schon, dass wir angesichts des kompletten Verlusts einer Raumdimension solche Abbilder überhaupt als Repräsentationen der (dreidimensionalen) Realität akzeptieren! Die darstellende Kunst hat wiederum versucht, diesen offensichtlichen Widerspruch zwischen Bild und Abgebildetem zu thematisieren — René Magritte hat diesem Thema sogar einen zentralen Teil seines Werkes gewidmet, Bild 4—1: „Les deux mystères“, Bild im Bild und Verbalisierung („Ceci n’est pas une pipe“).

4.1.1 Sehen wir dreidimensional?

Auch wenn es vom Thema dieses Abschnitts, der Erzeugung vollständiger dreidimensionaler Abbilder, etwas wegführt, wollen wir eine vorsichtige Deutung des Phänomens “räumliches Sehen” versuchen, um aufzuzeigen, dass dieses keineswegs mit dreidimensionalem Abbilden verwechselt werden

1. Unerheblich ist in diesem Zusammenhang, dass Realität philosophischen Paradigmen folgend nur in unseren Köpfen existiere und unsere Realität eine nur *dreidimensionale* ist, weil unsere Raumwahrnehmung auf drei Raumdimensionen beschränkt ist.



Bild 4—1

darf. Räumliches Sehen beruht auf einer Interpretation *zweidimensionaler* Bilder — der visuellen Reizmuster auf die flächig verteilten Rezeptorzellen der Retina. Abgesehen vom stereoskopischen Sehen, das auf Strukturvergleichen zwischen den binokularen Bildern beruht und nur im Nahbereich wirksam ist, bringen wir in hohem Maße a-priori-Wissen in die Interpretation ein — vielfach Erfahrungen, die wir durch Begehen des Raumes, Ertasten der Objekte oder Verfolgen derer Bewegungen gemacht haben.

Aufgrund dieses a-priori-Wissens können wir aus Schattierungsverläufen, die sich aus der Abhängigkeit der Reflexion von der Ausrichtung der Oberflächennormalen oder aus Abschattungen ergeben, auf die Oberflächen*form* der Objekte schließen. Perspektivische Verzerrungen, partielle, sich mit eventueller Bewegung verändernde Verdeckungen, Farb- und Kontrastnuancierungen lassen uns auf die Tiefenverteilung der Objekte im (beobachterfernen) Raum schließen. Die Dynamik realer Szenen unterstützt die dabei ablaufenden Wahrnehmungsprozesse in nicht unerheblichem Maße.

Die Geschichte der Malerei zeigt eindrucksvoll, wie die Strategien des räumlichen Sehens, der visuellen Wahrnehmung von Form und räumlicher Weite schrittweise entdeckt und bildnerisch umgesetzt worden ist, um die Suggestion des dreidimensionalen Raumes auf der flachen Leinwand zu erzeugen. Die Kunst hat sich auch die Aufgabe gestellt, unser Auge für die Täuschbarkeit unserer Rauminterpretation zu öffnen. So können die Schattierungen und perspektivischen Verzerrungen im Detail korrekt sein, aber unsere räumliche Interpretation der Szene ist dennoch absurd: Bild 4—2 „Ascending and Descending“, M. C. Escher (Ausschnitt).

Fortgeführt wird das Bestreben, die Raumsuggestion zu perfektionieren, in der Computergrafik. Aufgabe dieses dritten Segments der Computer-Visualistik ist es, bildliche Darstellungen zu *produzieren*, um z.B. Datenräume zu visualisieren, reale Szenen zu simulieren oder artifizielle Darstellungen zu animieren. Über die Suggestion des Raumes soll ein Verständnis der Dreidimensionalität der Szene oder des Objektes — z.B. des Modells

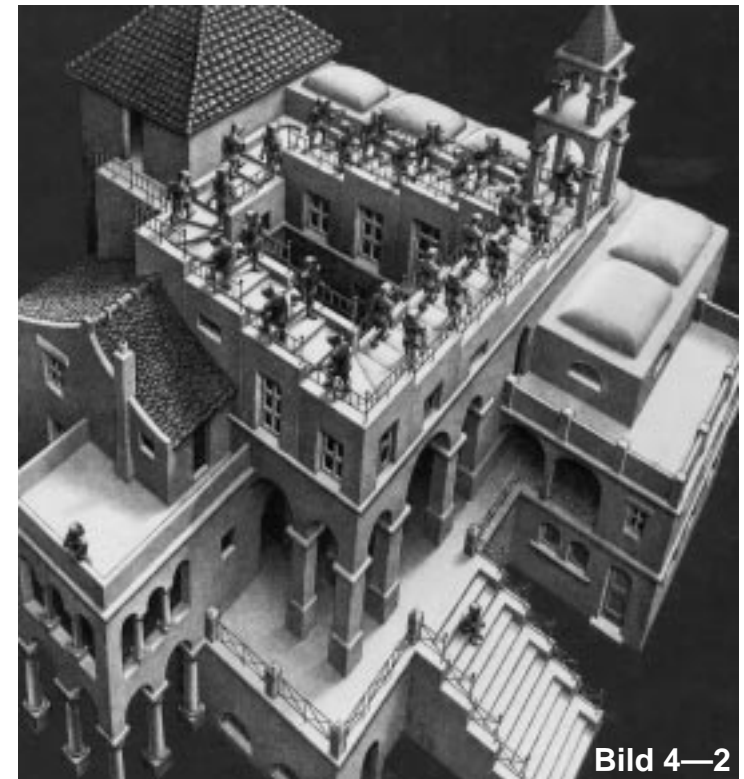


Bild 4—2

eines Makromoleküls — erzielt werden. Die Computergrafik liefert hierfür die theoretischen Grundlagen. Nachdem mit gewöhnlichen PCs selbst aufwendige Bildsynthesen in verträglichen Zeitspannen produziert werden können, wird mit großem Nachdruck versucht, die Modelle der räumlichen Wahrnehmungsstrategien immer vollständiger zu formulieren, die auf diesen Modellen basierenden Methoden zu verfeinern und so die Leistungsfähigkeit und Wirkung der Algorithmen weiter zu steigern.

Objekte, die wir als Volumina erleben, haben nun aus unserer Erfahrung im allgemeinen auch ein "Innenleben", das uns bisweilen in verschiedener Hinsicht interessiert. Wie sehr insbesondere unser eigenes Körperinneres oder das der umgebenden Tierwelt Menschen schon in früheren Kulturen so beschäftigt hat, dass die Vorstellungen bildlich umgesetzt und festgehalten wurden, zeigen viele überlieferte Bilddarstellungen — so z.B. nebenstehende Rindenzeichnung aus Australien, Bild 4—3. Stoffzusammensetzungen und deren räumliche Verteilung, Strukturiertheit des inneren Aufbaus, Zergliederung in voneinander abgrenzbare Teilvolumina bleiben jedoch dem Auge (und jeder auf optischer Abbildung im Bereich des sichtbaren Lichts basierenden technischen Bildgewinnung) unter der Oberfläche eines opaken Objekts verborgen.

Das Ziel der Entwicklung dreidimensionaler Abbildungsverfahren ist es, das Innere eines opaken Objektes zu entschlüsseln, ohne es öffnen, auftrennen oder zerlegen und damit zerstören oder zumindest in seiner Funktion stören zu müssen. Hier war und ist insbesondere die Medizin treibende Kraft, denn die Situation im Körperinneren mit einem chirurgischen Eingriff offenzulegen, ist nicht immer im Sinne des Patienten — dies schon gar nicht, wenn erst dem Pathologen diese Aufgabe zufällt.



Bild 4—3

4.1.2 Ansätze zur abbildungstechnischen Erschließung der dritten Dimension

Die Herstellung eines dreidimensionalen Abbildes stützt sich auf zwei Voraussetzungen:

1. Das für die Bildgebung benutzte Medium (Strahlen- bzw. Wellenfeld) muss den abzubildenden stoffgefüllten Objektraum vollständig und lückenlos durchdringen.
2. Aus der Modulation des detektierten Signals muss auf die modulierende Objekteigenschaft *orts*-selektiv in allen drei Raumkoordinaten zurückgeschlossen werden können.

Abbildungsverfahren, bei denen zusätzlich zu einer in zwei Dimensionen *orts*- oder *richtungs*-selektiven Detektion Entfernungsinformation gewonnen wird, können im weitesten Sinne zu den dreidimensionalen Abbildungsverfahren gerechnet werden.

Echolaufzeiten auszuwerten, ist eine sowohl in der Ultraschallbildgebung (Abschnitt 3.6 auf Seite 72) als auch in der Radartechnik genutzte Möglichkeit. Im allgemeinen wird dabei ein impulsmoduliertes Sendersignal von einem um ein oder zwei Raumachsen schwenk- oder rotierbaren Strahler (elektro-akustischer Wandler oder Antenne mit jeweils ausgeprägter Richtcharakteristik) abgestrahlt. In Ausnützung der Reziprozität werden die aus dem Objektraum rückgestreuten Echosignale von demselben Wandler (bzw. Antennen) sowohl *richtungs*- als auch *zeitselektiv* empfangen.

Eine andere Möglichkeit ist die Auswertung der Phasenlage einer vom Objekt rückgestreuten Welle. Ein prominenter Vertreter dieses Abbildungsprinzips ist die Holographie.

Mit diesen Abbildungstechniken wird zwar jeweils die zweite Forderung erfüllt, die erste jedoch nur unvollkommen, denn die Forderung nach Rückstreuung und gleichzeitiger Durchstrahlung widersprechen einander. Rückstreuung kann an *Grenzflächen* erfolgen, d.h. an Inhomogenitäten, deren

Ausdehnung groß gegenüber der Wellenlänge der verwendeten Strahlung ist. Auf diese Weise können nur objektinnere Strukturen abgebildet werden, die deutlich voneinander abgrenzbare Partialvolumina mit in erster Näherung glatten Grenzflächen darstellen. Rückstreuung erfolgt darüber hinaus an Streukörperverteilungen, sogenannten dreidimensionale Texturen: Inhomogenitäten von Abmessungen unterhalb der Wellenlänge verursachen eine Rayleigh-Streuung, die jedoch aufgrund der Überlagerung mit den für die Abbildung mittels kohärenter Strahlung typischen Speckle-Mustern kaum auswertbar ist. Hinter stark reflektierenden Oberflächen befindliche Volumenbereiche werden darüber hinaus abgeschattet (siehe auch Seite 75).

Vollständige und lückenlose Durchstrahlung opaquer Objekte — die Erfüllung der ersten Forderung — kann mit sehr kurzwelliger bzw. energiereicher Strahlung erreicht werden. So war die Entdeckung der Röntgenstrahlung revolutionär für die medizinische Diagnostik, denn mit Röntgenstrahlen konnten erstmals innere Strukturen des Körpers nichtinvasiv dargestellt werden. Abgesehen von der biologischen Unverträglichkeit ionisierender Strahlen, die zum sparsamsten Gebrauch nötigt, weisen konventionelle Röntgenbilder jedoch den Nachteil auf, dass sie lediglich zweidimensionale *Projektionen* des durchstrahlten dreidimensionalen Objekts darstellen, Bild 4—4: Ein Bildelement repräsentiert die *integrale* Wirkung der Absorptionseigenschaften des Objekts entlang des Strahlenkanals, der dieses Bildelement trifft. Eine Differenzierung einzelner Volumenelemente innerhalb diese Kanals ist nicht möglich.

Bei der Röntgendurchleuchtung, einer dynamischen Aufnahmetechnik unter Sichtkontrolle, verändert der Arzt die Projektionsrichtung und gewinnt dabei Zusatzinformationen für eine räumliche Interpretation. Diese Erfahrung führt zu der Frage, ob sich aus einer ausreichenden Zahl von Projektionsbildern aus unterschiedlichen Projektionsrichtungen die Ortsverteilung des projizierten Volumens *rekonstruieren* läßt. Die Lösung dieser Aufgabe hat zur Entwicklung der heute zu den Standarddiagnostetechniken zählenden *Computer-Tomographie* (englisch “computed tomography”, CT) geführt.

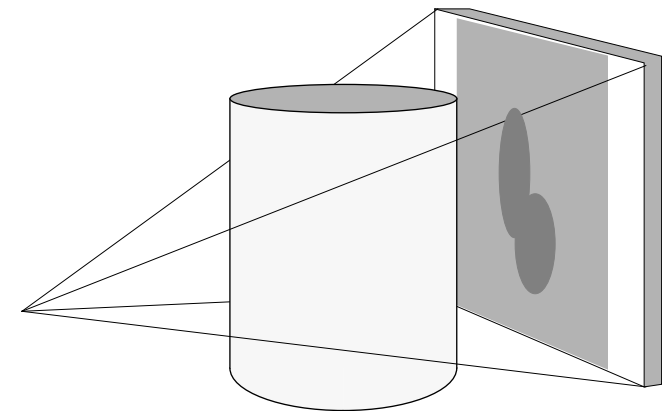


Bild 4—4

4.2 Computer-Tomographie mit Röntgenstrahlen (CT)

Zur Bearbeitung der Aufgabe, aus Projektionsaufnahmen ein Volumenobjekt zu rekonstruieren, wird das Problem zunächst um eine Dimension reduziert, indem aus dem Objekt eine 1-Voxel-dicke Schicht herausgeschnitten wird, Bild 4—5. Diese Schicht wird transversal, d.h. in der Schnittebene durchstrahlt und auf einen eindimensionalen linearen Sensor projiziert. Zur weiteren Vereinfachung soll die Projektion mit parallelen Strahlen erfolgen. Ein Sensorelement von $\Delta r \cdot \Delta z$ Messfläche misst die aus einem Strahlenkanal $p \cdot \Delta r \cdot \Delta z$ austretende Quantenfluenz¹, Bild 4—6. In jedem Volumenelement $\Delta p \cdot \Delta r \cdot \Delta z$ erfährt die Quantenfluenz durch Absorption und Streuung eine Schwächung. Als Maß für diese Schwächung ist der Schwächungs- oder Absorptionskoeffizient μ definiert, der die aus einem Volumeninkrement p austretende Quantenfluenz $\phi_2(p)$ mit der eintretenden Quantenfluenz $\phi_1(p)$ in Beziehung setzt, Gl. (4-1).

Die exponentielle Beziehung ist praktisch, weil eine im Strahlengang aufeinanderfolgende Schwächung eine multiplikative Wirkung hat: Die in ein Volumenelement ('Voxel') eintretende Quantenfluenz $\phi_1(p)$ ist die aus dem davor liegenden Voxel austretende Quantenfluenz $\phi_2(p-1)$. Die Gesamtschwächung eines Strahlenkanals von P Volumenelementen, d.h. das Verhältnis der bei r aus der Querschnittsschicht austretenden Quantenfluenz $\phi(r;\varphi)$ zur eingestrahelten Quantenfluenz ϕ_0 , ergibt sich somit nach Gl. (4-2) aus dem Produkt der Schwächung aller Volumenelemente im jeweiligen Strahlenkanal. Der rechnerisch aufwendige Produktterm läßt sich nun in Summenform schreiben, wenn der Logarithmus des Messsignals zugrunde gelegt wird, Gl. (4-3). (Bei einer kontinuierlichen Betrachtung des Strahlweges s ergibt sich die Integralform). Das logarithmierte Messsignal einer transversalen Parallelprojektion ergibt die Summation des eigentlich interessierenden Materialparameters μ über die Trajektorie der Röntgenstrahlen.

1. Zur Definition der Quantenfluenz siehe Seite 28.

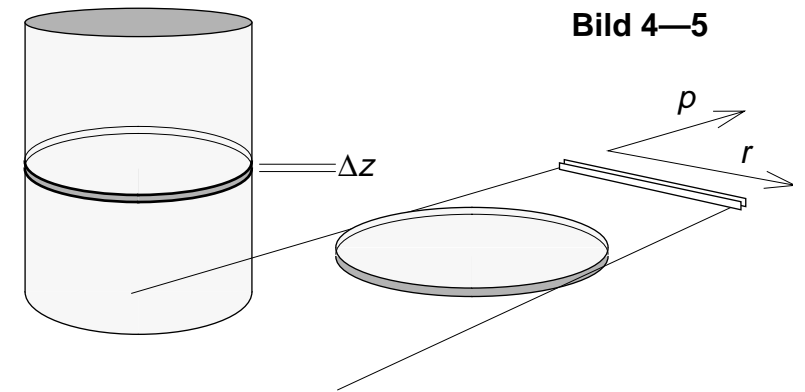


Bild 4—5

$$\phi_2(p) = \phi_1(p) \cdot e^{-\mu \cdot \Delta p} \quad (4-1)$$

$$\phi(r;\varphi) = \phi_0 \prod_{p=0}^{P-1} e^{-\mu(p) \cdot \Delta p} \quad (4-2)$$

$$-g_p(r;\varphi) \sim \ln \frac{\phi(r;\varphi)}{\phi_0} = \ln \prod_{p=0}^{P-1} e^{-\mu(p) \cdot \Delta p} = - \sum_{p=0}^{P-1} \mu(p) \cdot \Delta p \quad (4-3)$$

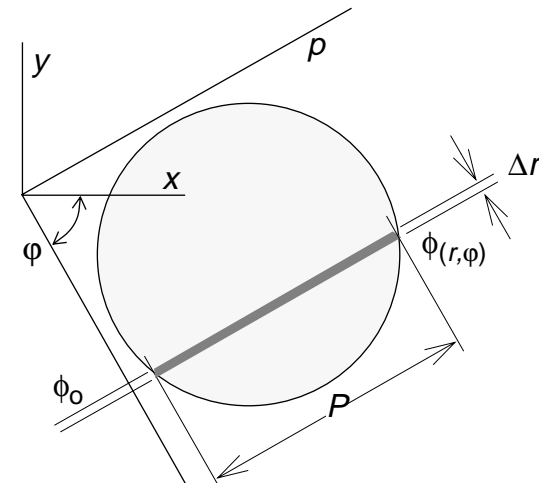


Bild 4—6

Dies ist aber gerade die *Projektionsfunktion*, wie sie in Abschnitt 2.5.3 auf Seite 53 für die Herleitung des Zentralschnitt-Theorems definiert wurde — und genau auf diesem Zusammenhang fußt die im folgenden behandelte Rekonstruktion der zweidimensionalen Verteilung der Messgröße in der durchstrahlten Schicht.

4.2.1 Rekonstruktion im Spektralbereich

Ein Rückgriff auf das Zentralschnitt-Theorem gibt die Antwort auf die Frage, welchen Informationsbeitrag eine einzelne (eindimensionale) Projektion für die beabsichtigte vollständige Rekonstruktion der (zweidimensionalen) Schnittebene liefert: Die Transformierte einer Projektion $g(p)$ in φ -Richtung liefert einen streifenförmigen Beitrag zum Spektrum, der den Ursprung der Spektralebene unter dem Winkel φ der Projektionsfunktion schneidet — in Gl. (4-4) formuliert als Multiplikation des Spektrums des Schnittbildes mit einer unter dem Winkel φ orientierten zentralen δ -Linie.

Die Lösung des vorliegenden *inversen Problems*, d.h. die Rekonstruktion der projizierten Schicht kann im Spektralbereich erfolgen. Dazu werden Projektionen aus unterschiedlichen Winkelrichtungen aufgenommen, Fourier-transformiert und in der Spektralebene aufsummiert. Die Anzahl der Projektionen muss ausreichend sein, um die Spektralebene innerhalb der durch das Abtastraster des Detektors gegebenen Grenzwellenzahl lückenlos im Abstand des Abtastintervalls zu belegen.

Die Superposition der Zentralschnittbeiträge ergibt allerdings noch nicht die Fouriertransformierte der projizierten Schicht, denn durch die partielle Überdeckung der streifenförmigen Beiträge wird die Spektralfunktion reziprok zum Abstand vom Ursprung gewichtet (dies korrespondiert zur Integration bei der Messung): Die Superposition der Projektionsfunktionen einer Punktfunktion $\delta(x,y)$ ergibt eine Spektralfunktion $G(k,l) = |1/q|$, Gl. (4-5). Diese Systemantwort ist mit der Systemfunktion im Spektralbereich $H(k,l)$

$$g_p(r;\varphi) = \sum_p \mu(p) \cdot \Delta p$$

○
●

$$G(q;\varphi) = \delta(\varphi) \cdot G(k, l)$$

(4-4)

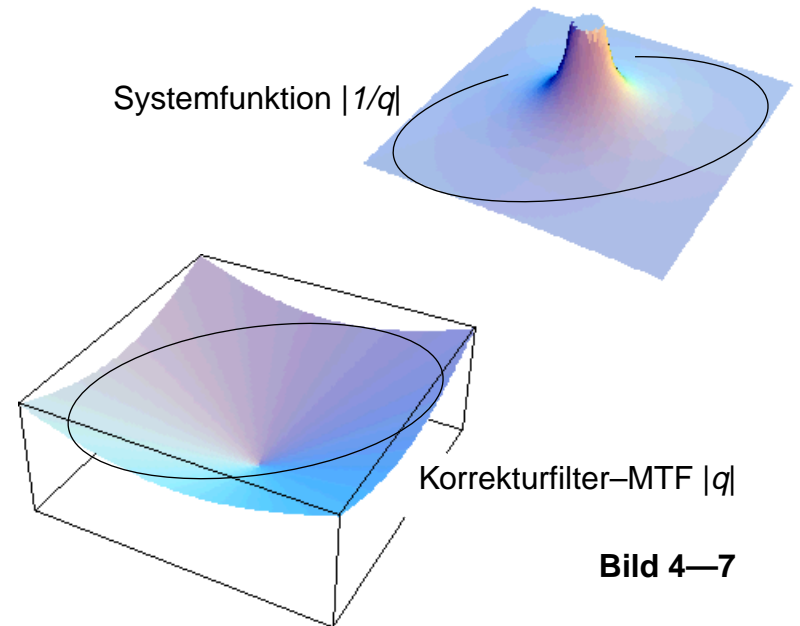


Bild 4—7

identisch. Die Multiplikation mit einer hierzu inversen spektralen Gewichtsfunktion $H_k(k,l) = |q|$, d.h. die Anwendung eines Korrekturfilters mit einer MTF, die radial linear ansteigt, erzeugt ein korrigiertes Spektrum, Bild 4—7. Eine anschließende inverse Fourier-Transformation liefert die Verteilung des Schwächungskoeffizienten in der Schichtebene.

Bedacht werden müssen weiterhin Einflüsse und Randbedingungen, die die Genauigkeit der Rekonstruktion einschränken:

- Die Anzahl der Elemente des Sensorarrays für die Aufnahme der Schichtprojektion sowie die Anzahl der Projektionsrichtungen bestimmen die Ortsauflösung des rekonstruierten Bildes. Das Winkelinkrement zwischen zwei benachbarten Projektionen sollte so bemessen sein, dass die äußersten Spektralkoeffizienten tangential und radial gleiche Abstände haben. Für einen vollständigen Primärdatensatz müssen bei einem Sensorarray mit R Sensorelementen $R \cdot \pi/2$ Projektionen äquidistant verteilt über einen Winkelbereich von 180° aufgenommen werden.
- Der Aufbau des Spektrums durch Aufsummieren der rotierten Streifenbeiträge erfolgt in einem diskreten zweidimensionalen kartesischen Raum der Abmessung R^2 , auf den die eindimensionalen Räume der transformierten Projektionen unter ihrem jeweiligen Winkel durch geeignete Interpolation abzubilden sind.
- Rauschsignale erfahren durch den wellenzahlproportionalen Übertragungsfaktor des Korrekturfilters eine Anhebung im Bereich hoher Wellenzahlen. Die Rekonstruktion ist also hochempfindlich gegenüber allen Rauschquellen zwischen Sensor und Digitalisierung, dem Quantenrauschen inbegriffen.
- Ungenauigkeiten einzelner Sensorelemente, d.h. Nullpunkt- oder Empfindlichkeitsdrift zwischen Kalibrierung und Aufnahme täuschen konzentrische Strukturen im Objekt vor. Sie erzeugen daher Artefakte im rekonstruierten Bild, die ähnlich wie Aliasing-Störungen durch nachgeschaltete Filter nicht eliminiert werden können.

$$g(x,y) = \delta(x,y) \quad (4-5)$$

$$\mathbf{G}(k,l) = \mathbf{H}(k,l) = \frac{1}{q}; \quad q = \sqrt{k^2 + l^2}$$

Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich aus der Forderung, dass für die Erfüllung der auf das Zentralschnitt-Theorem zurückgeführten Rekonstruktionsmethode Primärdatensätze angeboten werden müssen, die aus Parallelprojektionen gewonnen wurden. Technisch ist dies auf direktem Wege nur zeitsequentiell zu realisieren, indem eine Jochanordnung aus einer Röntgenquelle mit eng kollimiertem Strahlenprofil und einem Einzeldetektor eine Lateralbewegung über den Durchmesser des Objektraums ausgeführt.

Dieses Verfahren lag in der Tat den ersten CT-Geräten zugrunde. Es ist jedoch zeitaufwendig und mechanisch anspruchsvoll. Abgelöst wurde es durch die sogenannten *fanbeam*-Technik: Eine Röntgenquelle mit fächerförmig kollimiertem Strahlenprofil projiziert die Objektschicht transversal auf ein kreissegmentförmiges Array mit R Sensorzellen. Mittels "re-sampling" wird aus dem Satz der so gewonnenen *Zentralprojektionen* ein vollständiger Satz von Parallelprojektionen konstruiert, Bild 4—8: Die Strahlentrajektorie jedes Sensorpixels ist durch Winkel φ und Ursprungsabstand r festgelegt. In einem r, φ -Raum sind die Pixel einer Projektion auf einer geneigten Geraden allokiert, deren Neigung durch den Öffnungswinkel α des Strahlenfächers gegeben ist. Ein vollständiger Satz von Zentralprojektionen füllt eine trapezförmige Fläche. Parallele Projektionen würden im r, φ -Raum auf zur r -Achse parallelen Geraden allokiert sein. Durch geeignete Interpolation kann ein vollständiger Satz paralleler Projektionen aus den Messwerten von divergenten Projektionen errechnet werden.

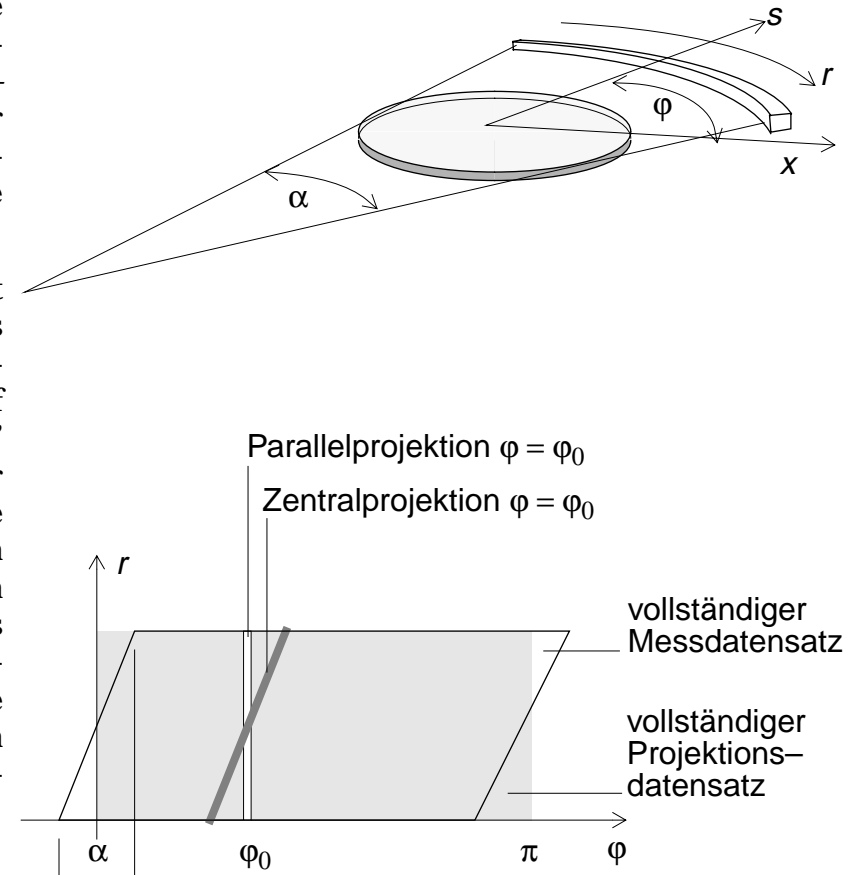


Bild 4—8

4.2.2 "Filtered Backprojection"

Für die praktische Realisierung des Rekonstruktionsverfahren hat es sich als günstig erwiesen, alle Verfahrensschritte im Ortsbereich durchzuführen und auf diese Weise alle Transformationen zu vermeiden. Das Verfahren ist einfach herzuleiten, wenn wir die Schrittfolge des Spektralbereichsverfahrens umordnen (bei einem LSI-System gilt die Kommutativität!) und für jeden Schritt die korrespondierende Operation im Ortsbereich einsetzen.

Wird die spektrale Korrektur bereits vor der Superposition der Projektionsspektren durchgeführt, dann reduziert sich das Korrekturfilter auf die Gewichtung der Transformaten $G(q;\varphi)$ jeder Projektion mit $H_k(q;\varphi) \sim |q|$ (q ist die radiale Wellenzahl). Die zu dieser *eindimensionalen* Operation korrespondierende Operation im Ortsbereich ist die Faltung der Projektionen $g(r;\varphi)$ mit der Transformaten von $H_k(q)$.

Die PSF $h_k(r)$ des im Ortsbereich anzuwendenden Korrekturfilters kann durch eine Zerlegung der Gewichtungsfunktion im Spektralbereich in Funktionen mit bekannten Transformaten gefunden werden. So kann $H_k(q)$ durch Subtraktion einer Dreiecksfunktion von einer rect-Funktion konstruiert werden. $h_k(r)$ ist folglich aus der Subtraktion der Transformaten dieser Funktionen — si-Funktion bzw. si^2 -Funktion — herzuleiten. In ihrer diskreten Repräsentation existiert die aus dieser Operation resultierende Funktion natürlich nur an den Abtaststützstellen der Projektionsfunktion $g(r;\varphi)$ (kleine Kreise in Bild 4—9): Außer bei $r=0$ ist die Korrekturfunktion an allen geraden Stützstellen Null, an den ungeraden negativ mit $-1/r^2$ -Abfall. Dies ergibt, wie wir aufgrund der integrierenden Messung der Projektionsfunktionen erwarten, eine PSF mit differenzierendem Charakter.

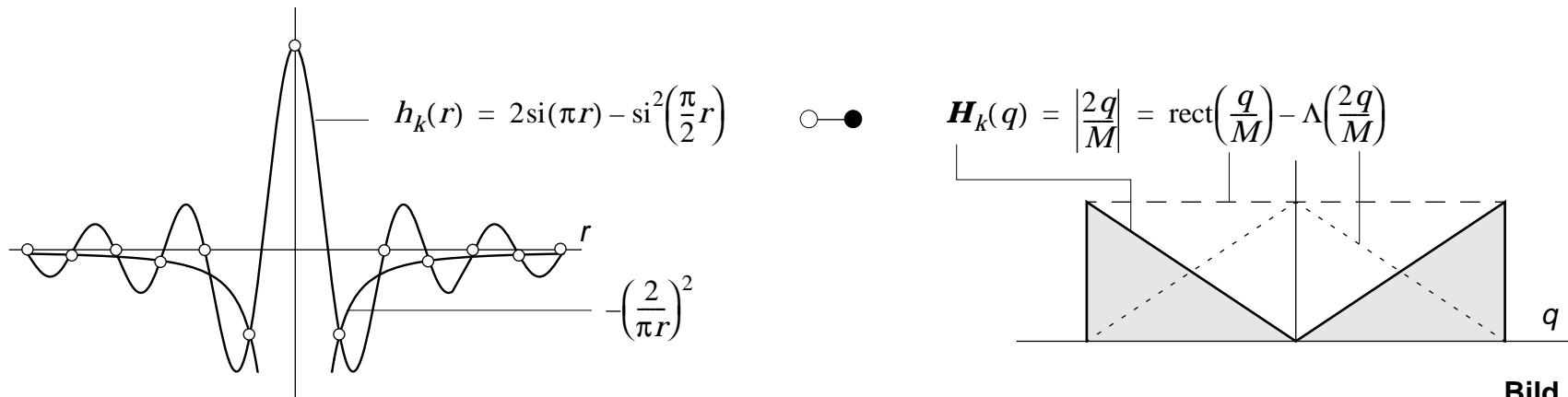


Bild 4—9

Im Ortsbereich erfordert die Rekonstruktion zwei Schritte:

1. Einem mit der Gewichtungsfunktion $H_k(q)$ multiplizierten Zentralschnitt entspricht die mit $h_k(r)$ gefaltete Projektionsfunktion.
2. Zu einem Zentralschnitt im Spektralbereich korrespondiert im Ortsbereich die sogenannte *Rückprojektion* (engl. *backprojection*), eine Gleichverteilung der Projektionsfunktion in Projektionsrichtung, d.h. jeder Funktionswert der gefilterten Projektionsfunktion wird als ein senkrecht auf diesem stehender Streifen der Abtastbreite in die Bildebene eingetragen. Aufgrund des Superpositionssatzes wird aus einer Summation von Zentralschnittbeiträgen im Spektralbereich ebenfalls eine Summation von Rückprojektionen im Ortsbereich.

Die Rekonstruktion einer projizierten Schicht stellt sich im Ortsbereich damit als Aufeinanderfolge einer eindimensionalen Filterung aller Projektionen (Faltung mit dem oben beschriebenen Faltungskern) und einer anschließenden Rückprojektion aller gefilterten Projektionen durch Aufsummieren in der Ortsbereichsebene dar, Bild 4–10. Dieses Verfahren wird als "filtered backprojection" bezeichnet.

4.2.3 CT — ein abbildendes Messverfahren

Abbildungsverfahren, die die Dreidimensionalität einer Szene oder eines Objekts auf zwei Bilddimensionen reduzieren, liefern im allgemeinen nur Information über die Rückstreuereigenschaften der darstellbaren Objektflächen. Sie lassen keine direkte Aussage über Materialgrößen definierter Teilvolumina zu. Dasselbe gilt für echobasierte Abbildungsverfahren. Auch Projektionsverfahren (konventionelle Röntgenbildgebung, Gammakamera) liefern lediglich summarische Aussagen, die sich durch Integration über die im Bild nicht aufgelöste Raumdimension ergeben.

Mit der Entwicklung der Computer-Tomographie war es erstmalig gelungen, Materialparameter, das heißt physikalische Eigenschaften innerhalb

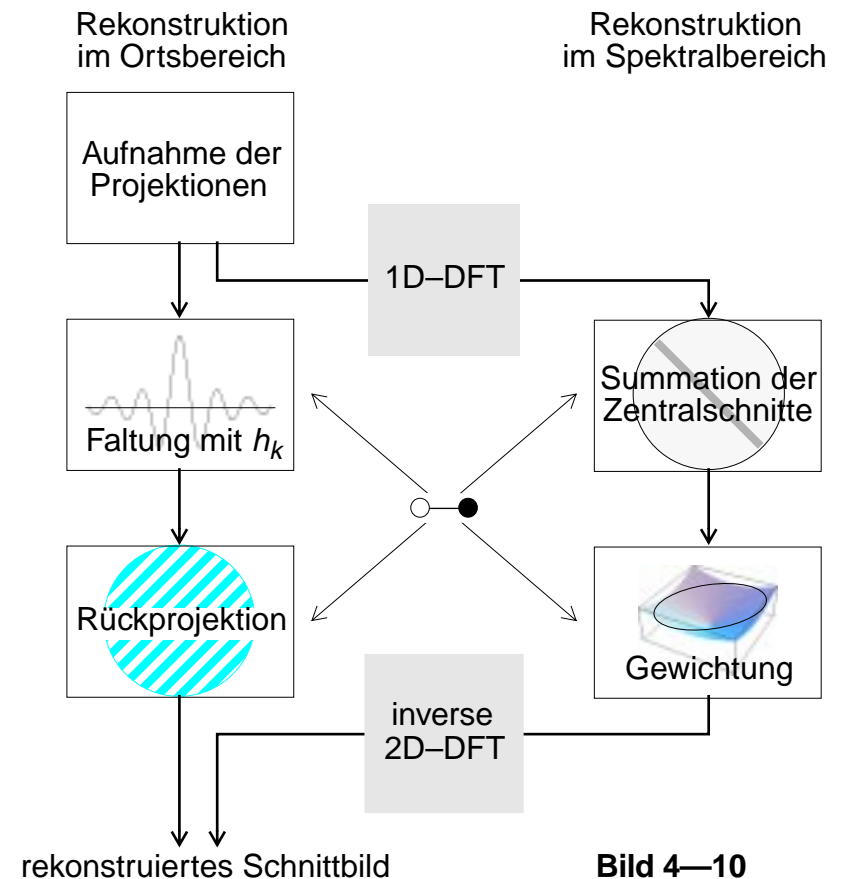


Bild 4—10

kleinster durch das Rekonstruktionsverfahren aufgelöster Volumenelemente — der Voxel — *reproduzierbar* zu quantifizieren. Damit wird die Computer-Tomographie zu einem abbildenden *Messverfahren*. Bei der Computer-Tomographie mit Röntgenstrahlen werden — allerdings nicht strikt von einander trennbar — verschiedene für die Schwächung der Röntgenstrahlung verantwortlichen Parameter wie Atomgewicht und Stoffdichte gemessen. Diese Messungen lassen weit differenziertere Rückschlüsse z.B. auf biologische Eigenschaften der durchstrahlten Objektbereiche zu, als die in konventionellen Röntgenbildern zwischen Knochen, Flüssigkeiten/Gewebe und Gasen kaum hinausgehende Differenzierbarkeit. Durch die Möglichkeit, das Abbildungsverfahren im messtechnischen Sinne zu kalibrieren, kann darüber hinaus eine Referenzskala angelegt werden, anhand derer vergleichende quantitative Bestimmungen durchgeführt werden können. Dies wiederum kann zu sichereren qualitativen Aussagen führen.

In der medizinischen Diagnostik bot die Röntgen-CT erstmals eine Differenzierung unterschiedlicher Gewebetypen auf *nichtinvasivem* Wege. So wurde bereits unmittelbar nach der Einführung der ersten CT-Entwicklungen die Darstellung von Hirntumoren gegenüber der umgebenden Hirnsubstanz ohne die vorher notwendigen strapaziösen und evtl. sogar riskanten Kontrastmitteltechniken (Angiographie, Pneumenzephalographie) zum überzeugenden Beweis des diagnostischen Mehrwertes dieser Abbildungstechnik. Bild 4—11 zeigt als Beispiel einen axialen Schnitt durch den Schädel.

Allgemein eingeführt ist in der medizinischen Diagnostik die nach dem Erfinder der Computer-Tomographie Godfrey Newbold Hounsfield benannte *Hounsfield-Skala*: Bezugspunkte dieser Skala sind die Absorption von Wasser (Nullpunkt) und der absorptionslose Zustand (−1000 Hounsfield Units). Auf dieser Skala werden proteinreiches Gewebe im Bereich 30...40 HU (z.B. graue Hirnsubstanz +38 HU, weiße Hirnsubstanz +30 HU), fettreiches Gewebe bei −100 HU, Blut +12 HU und Knochensubstanz je nach ihrer Dichte zwischen +100 und über +1000 HU dargestellt, Bild 4—12.

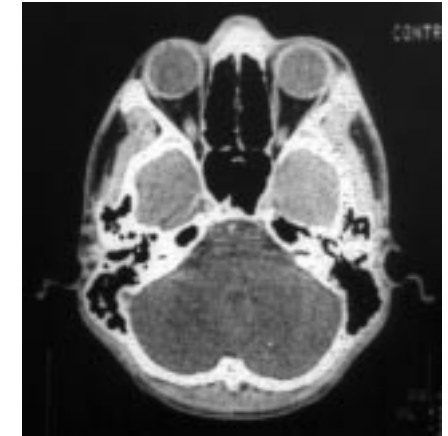


Bild 4—11

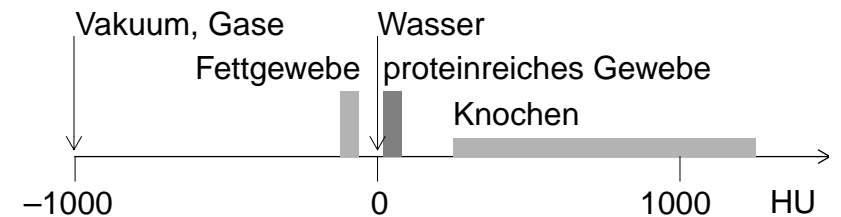


Bild 4—12

Moderne CT-Geräte liefern reproduzierbare Kontraststufen um eine HU und ermöglichen damit eine medizinisch relevante Gewebedifferenzierung. CT-Systeme können heute so kompakt gebaut werden, dass sie sogar für den mobilen Einsatz in der invasiven Diagnostik oder in der Chirurgie Anwendung finden, Bild 4—13 (Werkbild Philips).

4.2.4 Anmerkungen zum Rekonstruktionsverfahren

Auch ein Abbildungsprozess, der Schnittbilder eines dreidimensionalen Objekts mittels CT-Rekonstruktion erzeugt, muss dem Abtasttheorem gehorchen — in diesem Falle sogar in allem drei Raumdimensionen: Zur zweidimensionalen Diskretisierung in der Schnittebene kommt die bildliche Zerlegung des Objekts im Abstand Δz der Schnittebenen hinzu.

Da im allgemeinen die Objektstrukturen keine ausgeprägten und durchgängigen Vorzugsrichtungen haben, die anisotrope Abtastraster (d.h. nicht-kubische Voxel) sinnvoll erscheinen lassen würden, liegt es nahe, den Abstand der Schnittebenen auf das Pixelraster in der Schnittebene abzustimmen. In der Praxis der CT wird hier oft "gesündigt": Mit dem Vorsatz, unnötige Strahlenbelastung zu vermeiden, werden Schnittbildsequenzen mit einem zwei- bis fünffachen Pixelintervall gefahren. Deutlich werden die durch die Unterabtastung in axialer Richtung (z -Richtung) verursachten Artefakte in dem Auftreten stäbchenartiger Pixel, wenn aus dem dreidimensionalen Datensatz einer Schnittbildsequenz laterale oder sagittale Schnittdarstellungen (Bildmatrizen in x,z - oder y,z -Ebenen) konstruiert werden.

Dass solche Artefakte nicht ohne weiteres erkannt werden können, wenn ausschließlich axiale Darstellungen (Bildmatrizen in der Projektionsebene, d.h. in x,y -Ebenen) betrachtet werden, ist darauf zurückzuführen, dass wir diese in Assoziation zum Mikroskopieren als *Schnittbilder* wahrnehmen und die dritte Dimension aus der simultanen oder sukzessiven Betrachtung mehrerer Bildebenen mental rekonstruieren. Aus Sicht des Abbildungs-

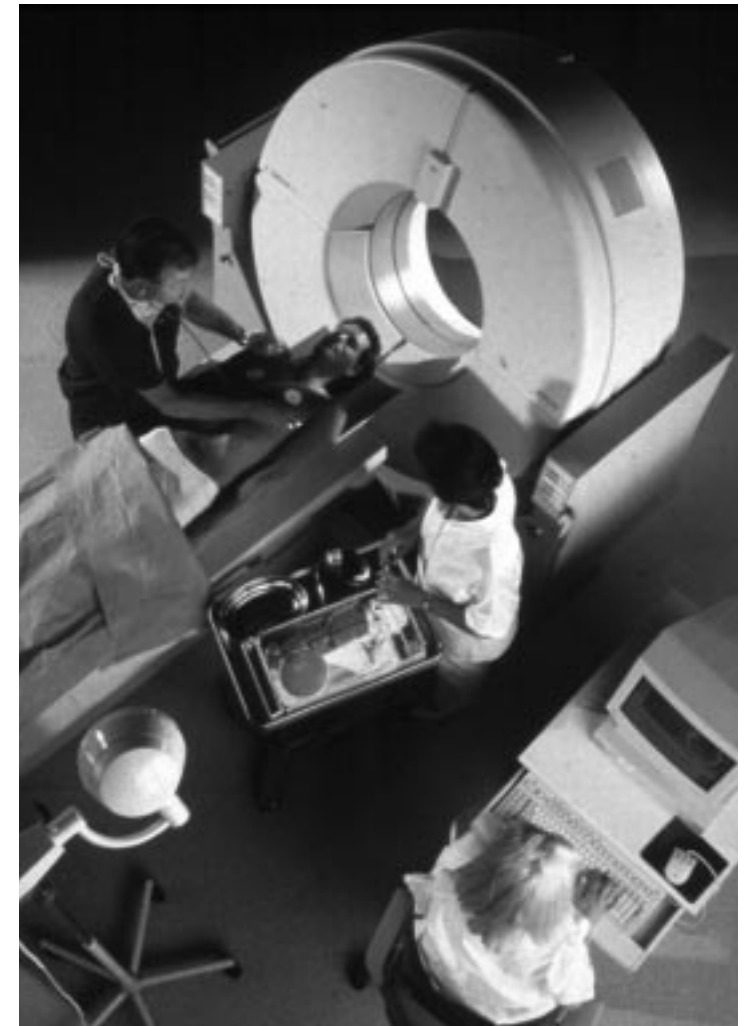


Bild 4—13

vorganges handelt es sich jedoch um *Schicht*bilder, denn bei der Gewinnung des primären Messsignals wird über die Detektorapertur in *z*-Richtung integriert. Auch im englischen Sprachgebrauch wird die Diskrepanz zwischen objektiv Dargestelltem und subjektiv Interpretiertem durch undifferenzierte Verwendung der Termini “slice” und “layer” verdeckt.

Sobald Darstellungen aus einem rekonstruierten 3D-Datensatz hergestellt werden sollen, die über die Präsentation axialer Schnittbilder hinausgehen — Schnittbilder unter beliebigem Raumwinkel oder gar pseudo-räumliche Bilder —, wird offenkundig, dass Detektorabmessungen, Projektionswinkelinkrement und Schichtdicke bzw. Schnittebenenabstand in einer für die Rekonstruktion *kubischer* Voxel geeigneten Relation stehen müssen.

Die Schwierigkeit (oder sogar Unmöglichkeit), das in den drei Raumkoordinaten vollständig erfasste Objekt so zu visualisieren, dass auch Feinstrukturen *dreidimensional* interpretiert werden können, ist nicht nur durch die Unvollkommenheit unserer bisherigen Visualisierungstechniken und -technologien begründet. Hier manifestiert sich auch die schon oben behandelte Begrenztheit unserer räumlichen Wahrnehmung: Vergleichbare visuelle Situationen bietet unsere natürliche Umgebung nicht! So wird heute als Standard-Visualisierungstechnik immer noch die simultane oder sukzessive Darstellung axialer Schnittbilder angewandt — bei Bedarf durch laterale und sagittale Schnitte ergänzt zu einer von Konstruktionszeichnungen gewohnten Raumdarstellung. Erfahrungsgemäß geht selbst erfahrenen Betrachtern bereits in beliebig geneigten Schnittebenen (“*double oblique projections*”) ohne zusätzliche Visualisierungshilfen die Orientierung verloren.

Eine weitere Möglichkeit der Präsentation sind pseudo-räumliche Darstellungen, die mit Visualisierungsverfahren der 3D-Computergrafik hergestellt werden. Eingesetzt werden sowohl “surface rendering” als auch “volume rendering” als Verfahren, die räumlichen Daten wiederum auf die zwei Dimensionen des präsentierbaren Bildes zu reduzieren. In beiden Fällen muss die Darstellung des Objektraumes auf Oberflächen oder Grenzflächen kompak-

ter oder zusammenhängender Segmente reduziert werden. Die gewünschte Raumsuggestion wird durch Schattierungen der Oberflächen erreicht. Räumliche Feinstrukturen gehen dabei verloren.

Als ein spezielles Problem soll noch einmal die Transformation der primären Abtastmessdaten in ein diskretes Bildraaster aufgegriffen werden. Rekonstruiert werden soll ein Schnittbild, das ein kreisförmiges Feld innerhalb des umschreibenden quadratischen Bildraumes der Dimension $R \cdot R$ füllt. Das Schnittbild umfasst also $R^2 \cdot \pi/4$ Pixel, die entweder durch Rücktransformation aus dem Spektralbereich oder durch Rückprojektion der gefilterten Projektionsfunktionen im Ortsbereich gewonnen werden. Vorausgesetzt, dass das Objekt durch den Bildbereich vollständig erfasst wird und vereinfachend eine parallele Projektionsgeometrie angenommen wird, müssen die Projektionsfunktionen jeweils R Abtastwerte umfassen. Damit auch im Randbereich das Abtasttheorem in tangentialer Richtung erfüllt ist, sind $R\pi/2$ Projektionsrichtungen über einen Winkelbereich von 180° äquidistant zu verteilen. Mithin sind $R^2 \cdot \pi/2$ Abtastwerte erforderlich um $R^2 \cdot \pi/4$ Pixel zu rekonstruieren. Diese unvermeidbare Überabtastung lässt sich am einfachsten aus der Betrachtung des Rekonstruktionsproblems im Spektralbereich erklären: Die Verdichtung der Energie gegen den Ursprung hin infolge der Zentralschnittüberlagerung trägt nicht zur Auflösung im Ortsbereich bei.

Unvermeidbare Überabtastung und numerische Komplikationen aufgrund der notwendigen Interpolationen beim Übergang von den Polarkoordinaten der Projektionsfunktionen zu den kartesischen Koordinaten des zu rekonstruierenden Bildes respektive dessen Spektrum geben zu einem Gedanken-spiel Anlass: Könnte die Projektion, d.h. die integrale Messung durch die zu rekonstruierende Schicht so modifiziert werden, dass aus ihrer Fouriertransformation statt zentraler Schnitte durch das Spektrum *achsenparallele* Schnitte resultieren? Wenn Information über die Verteilung der Messgröße innerhalb der abzubildenden Schicht nicht anders als durch Messung der Projektionsfunktion gewonnen werden kann (deren Transformierte grundsätzlich einen *zentralen* Schnitt ergibt), könnte versucht werden, das

Spektrum in Projektionsrichtung zu verschieben: Ein Zentralschnitt durch ein in Projektionsrichtung verschobenes Spektrum entspräche einem in die Gegenrichtung verschobenen spektralen Schnitt.

Nach dem Verschiebungssatz (siehe Seite 51) müsste zu diesem Zweck die Objektfunktion $g(m,n)$ aufgrund der Symmetrie der Fourier-Transformation mit einer komplexen Welle der Wellenzahl l_1 moduliert (d.h. multipliziert) werden, Gl. (4-6). Dann könnte aus ihrer Projektion in n -Richtung ein um l_1 verschobener Spektralschnitt gewonnen werden, Bild 4-14. Um nach dieser Methode ein vollständiges Spektrum der Objektfunktion zu erhalten, müsste die Wellenzahl dieser komplexen Modulationswelle bei *unveränderter* Projektionsrichtung in Δl -Schritten zwischen l_{\max} und $-l_{\max}$ variiert werden. Für die Erzeugung von Projektionsfunktionen mittels Röntgenstrahlung ist eine derartige Modulation physikalisch unrealisierbar. Wir werden diesen Ansatz aber im nächsten Abschnitt wieder aufgreifen.

4.3 Magnetresonanz-Tomographie (MR)

Mit der Magnetresonanz-Tomographie — auch *Kernspin*-Tomographie, englisch '(nuclear) magnetic resonance imaging', abgekürzt NMR, MRI oder kurz MR — wurde ein chemisches Analyseverfahren zu einem abbildenden System ausgebaut. Irreführend ist der Begriff „Tomographie“, der lediglich widerspiegelt, dass das Endprodukt dieses Abbildungsverfahrens — 3D-Datensätze opaquer Objekte — wiederum schnittbildweise ausgewertet wird. Im Unterschied zur Röntgen-CT wird das Objekt hierbei nicht im Transmissionsmodus durch eine Fremdstrahlung schichtweise projiziert, sondern stellt selbst eine verteilte Strahlenquelle dar, die von außen angeregt wird: Unkompensierte Protonenspins werden in einem starken Magnetfeld ausgerichtet und durch einen Hf-Impuls auf ihrer Präzessionsfrequenz angeregt. Die hierbei aufgenommene Energie strahlen sie in einer anschließenden Relaxionsphase wieder als Hf-Feld ab. Die im Umfeld des Objekts

$$g(m, n) \cdot e^{-j2\pi \frac{n \cdot l_1}{N}} \quad \circ \bullet \quad \mathbf{G}(k, l + l_1) \quad (4-6)$$

Modulation der Schicht mit komplexer Wellenfunktion

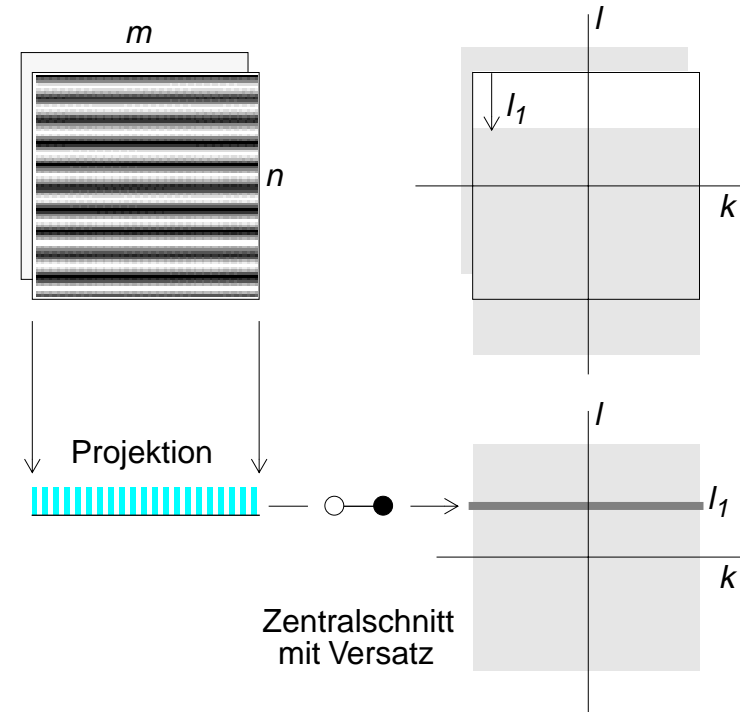


Bild 4-14

messbare Hf-Energie ist ein Maß für die Gesamtmasse angeregter Protonen. Ein abbildendes Messverfahren wird daraus, indem die Energiedichte mittels einer geschickten Kombination ortsbegrenzter Anregung und ortsmodulierter Auslesung dreidimensional ortsabhängig gemessen wird.

4.3.1 Physikalische Grundlage der MR-Bildgebung¹

Die physikalische Grundlage der MR-Bildgebung ist in der Bloch-Gleichung (4-7) formuliert. Sie beschreibt das Verhalten des Magnetisierungsvektors \vec{M} ungekoppelter Protonenspins, z.B. polarisierter Wasser-Protonen.

In Gl. (4-7) ist γ die gyromagnetische Konstante, \vec{B} die effektive magnetische Feldstärke und M_0 ist die Magnetisierung im nicht angeregten Zustand (Gleichgewichtszustand). T_1 und T_2 sind Relaxationszeitkonstanten:

- T_1 beschreibt, wie schnell die longitudinale Magnetisierung nach einer Anregung in die Richtung des äußeren Feldes, d.h. in ihren Gleichgewichtszustand zurückkehrt.
- T_2 beschreibt das entsprechende Abklingen einer durch die Anregung verursachten *kohärenten* Magnetisierung in der transversalen Ebene.

Ihre biologische Bedeutung hat die Bestimmung dieser Zeitkonstanten, da beide durch die Interaktion zwischen Protonen zu Wasser oder anderen Kernen mit gewebespezifischen Makromolekülen beeinflusst werden. Beide Zeitkonstanten tragen dabei unabhängig voneinander zur Gewebedifferenzierung bei. T_1 liegt in der Größenordnung von 1 Sekunde.

Eine geschlossene Lösung der Bloch-Gleichung existiert für beliebige B -Felder nicht. Für den stationären Fall, d.h. in Gegenwart eines stationären Feldes $B_0 = B_z$ aber unter Vernachlässigung der Relaxationsterme, korrespondiert die Lösung zu einer Präzession der Magnetisierung um den

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \gamma \vec{B} \times \vec{M} - \left(\frac{\vec{M}_{xy}}{T_2} + \frac{\vec{M}_z - \vec{M}_0}{T_1} \right) \quad (4-7)$$

$$\vec{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_{xy} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{M}_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{Bmatrix} \quad \vec{M}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{Bmatrix}$$

1. Cho ZH, Jones JP und Singh M: Foundations of Medical Imaging; John Wiley Inc 1993

4 Die 3D-Rekonstruktion aus Projektionen

Feldvektor mit einer B_0 -proportionalen Frequenz ω_0 , der *Larmor-Frequenz*, Gl. (4-8). In einem überlagerten Hf-Feld nehmen die Protonenspins im Resonanzfall ($\omega = \omega_0$) Energie auf, indem ihre Magnetisierung weiter aus der longitudinalen Gleichgewichtslage in eine kohärente transversale Komponente überführt wird. Nach Abschalten der Hf-Anregung kehrt der Spin in seine Gleichgewichtslage zurück (Relaxation). Die Transversalkomponente M_{xy} der Magnetisierung produziert während der Relaxation ein elektromagnetisches Feld, das messtechnisch ausgewertet werden kann.

Für die Bildgebung, d.h. für die Realisierung einer Ortsabhängigkeit dieses Messvorganges wird die Abhängigkeit der Präzessionsfrequenz von der magnetischen Feldstärke ausgenutzt. Wird dem statischen Grundfeld $B_0 = B_z$ ein Feldgradient $grad \vec{B}$ überlagert, dann wird die Präzessionsfrequenz eine Funktion des Ortes, Gl. (4-9). Die Relaxation nach einer Hf-Anregung liefert nun ein Messsignal, das aus der Überlagerung von Signalbeiträgen $ds(t)$ resultiert, die von Volumenelementen $d\vec{x}$ mit jeweils ortsabhängiger Frequenz produziert werden, Bild 4-15. Unter Vernachlässigung des Abklingvorgangs kann die Signalquelle, das Kollektiv kreiselnder magnetischer Dipole in einem Volumenelement, durch eine komplexe Schwingung beschrieben werden, Gl. (4-10), die als komplexes Signal durch senkrecht aufeinander stehende Quadraturspulen detektiert werden kann.

4.3.2 Realisierung einer ortsselektiven Messung

Eine durch einen Feldgradienten gesteuerte Abhängigkeit der Präzessionsfrequenz vom Ort wird nun in zwei Schritten genutzt, um in Kombination die angestrebte ortsselektive Messung zu realisieren:

1. Während der Anregung, d.h. Einstrahlung der Hf-Energie durch ein äußeres Hf-Feld der Frequenz ω_a werden nur Spins angeregt, die mit der Anregung in Resonanz sind. Wird in dieser Zeit ein z -Gradient angebracht, dann ist die Resonanzbedingung nur in einer xy -Ebene erfüllt, Bild 4-16. Wenn B_0 festliegt, wird die Höhe z dieser Ebene

4.3 Magnetresonanz-Tomographie (MR)

$$\omega_0 = \gamma B_0 \quad (4-8)$$

$$\omega_{0(\text{Proton})} = 2\pi \cdot 6,7752 \frac{\text{MHz}}{\text{T}}$$

$$\omega(\vec{x}) = \gamma(B_0 + \vec{x} \cdot grad \vec{B}) \quad (4-9)$$

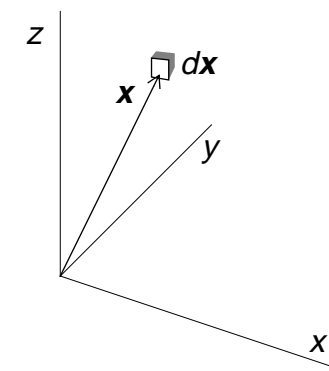


Bild 4-15

$$ds(t) \sim \frac{dM}{dt} = j\omega M_{xy}(\vec{x}) \cdot e^{j\omega(\vec{x})t} d\vec{x} \quad (4-10)$$

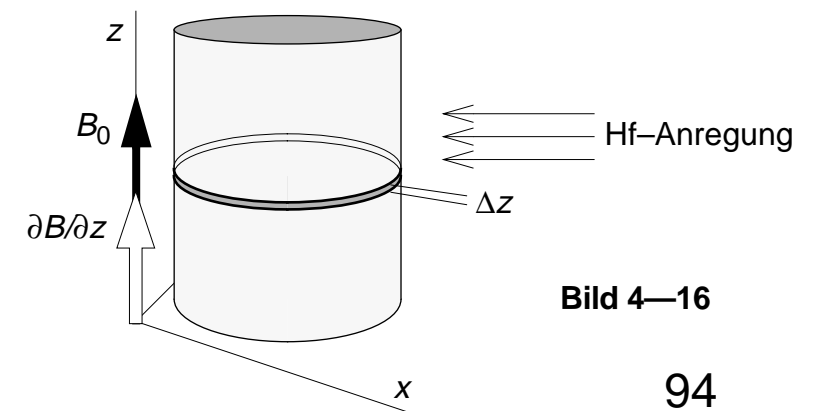


Bild 4-16

4 Die 3D-Rekonstruktion aus Projektionen

nach Gl. (4-9) durch ω_a bestimmt. Zum Messsignal kann folglich auch nur das Volumen einer Schicht um diese Ebene herum beitragen.

- Der zweite Schritt besteht nun darin, dass das integrale Relaxationssignal aus dieser Schicht durch Anbringen weiterer Gradienten während des anschließenden Messvorganges im *Frequenzbereich* ortsselektiv aufgelöst wird. Wird während der Messung z.B. ein x -Gradient angebracht (Bild 4-17), verschiebt sich die Präzessionsfrequenz entlang der x -Koordinate. In dem auf diese Weise aufgefächerten Frequenzspektrum des Messsignals kann die Frequenz der spektralen Komponenten der x -Koordinate ihrer Quellenorte zugeordnet werden. D.h. jedes Spektralintervall repräsentiert die in einem streifenförmigen Volumenanteil akkumulierten Spins. Das Signalspektrum entspricht also der *Projektionsfunktion* der xy -Schicht in y -Richtung!

Gl. (4-11) legt — unter einigen Vernachlässigungen — eine formale Ableitung dar. Als Signalquelle wurde in Gl. (4-10) die ortsabhängige Spindichte $g(x,y)$ eingesetzt. Die durch die Anregung erreichte Ausschaltung der z -Koordinate führt zu einem Flächenintegral für das im Zeitbereich gemessene Relaxationssignal $s(t)$. Eine Zerlegung dieses Integrals lässt die Übereinstimmung mit dem Fourier-Integral in x -Richtung bei gleichzeitiger Integration über die y -Richtung erkennen. Das demodulierte Zeitsignal entspricht damit der Transformierten der Projektionsfunktion $g_p(x,y)$, also einem Zentralschnitt auf der k -Achse das Spektrums $G(k,l)$ der Schichtfunktion $g(x,y)$, siehe dazu Bild 2-17 auf Seite 53. Notwendig ist dazu eine Frequenzdemodulation des Hf-Signals, d.h. eine Frequenzverschiebung um $-\omega_0$.

4.3.3 Das Rekonstruktionsverfahren

Da die Zeitbereichsdarstellung des Messsignals bereits einen Zentralschnitt in Richtung des jeweiligen Auslesegradienten liefert, liegt es nahe, die Rekonstruktion der angeregten Schicht nicht wie bei der Röntgen-CT üblich

4.3 Magnetresonanz-Tomographie (MR)

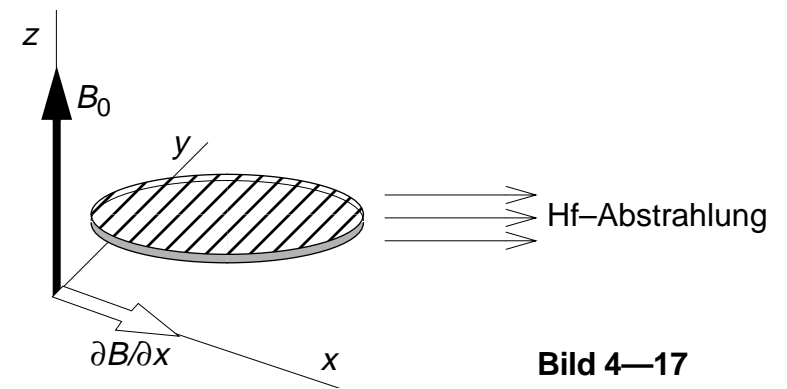


Bild 4-17

$$ds(t) = g(\vec{x}) \cdot e^{-j\gamma(B_0 + \vec{x} \cdot \text{grad}\vec{B})t} d\vec{x}$$

$$s(t) = \iint_{xy} g(x,y) \cdot e^{j(\omega_0 - \gamma \cdot x \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x})t} dx dy$$

mit $\omega_0 = \gamma B_0$ und $\vec{x} \cdot \text{grad}\vec{B} = x \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$

$$s(t) = e^{j\omega_0 t} \cdot \left[\int_x \left[\int_y g(x,y) dy \right] \cdot e^{-j\gamma t \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \cdot x} dx \right]$$

$$s(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} = G(k;0)$$

$$\begin{array}{c} \circ \quad \quad \quad \circ \\ | \quad \quad \quad | \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \end{array} \quad (4-11)$$

$$S(\omega - \omega_0) = g_p(x,y)$$

im Ortsbereich sondern im Spektralbereich vorzunehmen. Außer der oben erwähnten Demodulation des hochfrequenten Messsignals muss eine Phasenkorrektur vorgenommen werden: Um die geforderte Frequenzauflösung zu erreichen, muss der Messvorgang über ein endliches Messzeitintervall T_m erfolgen. In dieser Zeit wirkt aufgrund des x -Gradienten eine ortsabhängige Frequenzverschiebung. Als Folge stellt sich nach Ablauf von T_m ein in x -Richtung zunehmender Phasenfehler ein. Um alle Spektralkomponenten des Hf-Signals symmetrisch zu überlagern, muss aber die mittlere Phasenverschiebung während der Messzeit Null sein. Die Auswirkung dieser Phasenmodulation ist zu kompensieren, indem dem Messzeitintervall nach der Anregung ein negativer x -Gradient vorgeschaltet wird, dessen Produkt aus Amplitude und Impulsdauer gerade halb so groß wie dasjenige des Auslesegradienten ist: die sogenannte *Dephasierung*.

Anstatt nun durch eine Sequenz von Auslesezyklen mit jeweils inkrementierter Winkelrichtung eines Feldgradienten in der xy -Ebene eine zur Röntgen-CT äquivalente Ausgangsbedingung für die Rekonstruktion der Quellendichteverteilung in der angeregten Schicht zu schaffen, kann bei der MR-Bildgebung ein eleganterer Weg gegangen werden. Über die komplexe Beziehung zwischen dem Beitrag eines inkrementellen Volumens zum Messsignal und seinem Ort kann eine ortsabhängige Phasenmodulation der Schicht vorgenommen werden, mit der die in dem Gedankenexperiment auf Seite 92 postulierte *lineare* Verschiebung im Spektralbereich realisiert werden kann, wie im folgenden skizziert wird.

Wird zwischen dem Ende der Anregung und dem Beginn des Auslesens ein y -Gradient angebracht, dann wird die Präzessionsfrequenz entsprechend ortsabhängig moduliert: Die Spins erfahren eine in y -Richtung zunehmende Erhöhung (bzw. Verminderung bei negativen Vorzeichen des y -Gradienten) ihrer Präzessionsfrequenz. Nachdem der y -Gradient eine begrenzte Zeit T_p gewirkt hat, hat die Frequenzverschiebung zu einer ortsabhängigen Phasenverschiebung in y -Richtung geführt: Beschrieben wird der zum Abstand von der x -Achse proportionale Phasenwinkel, um den die Spinphase nun vor-

$$s'(t) = \iint_{xy} g(x,y) \cdot e^{j\left[\left(\omega_0 - \gamma \cdot x \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\right)t - \left(\gamma \cdot y \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\right)T_p\right]} dx dy$$

$$s'(t) = e^{j\omega_0 t} \cdot \int \left[\int_{x \perp y} g(x,y) \cdot e^{-j \cdot \gamma \cdot T_p \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cdot y} dy \right] e^{-j\gamma t \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \cdot x} dx$$

$$s'(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} = G(k; l_p) \quad l_p \sim \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}$$

(4-12)

4 Die 3D-Rekonstruktion aus Projektionen

bzw. naheilt, durch den additiven Term $-(\dots) \cdot T_p$ in Gl. (4-12). Die so erzielte Phasenmodulation wird als *Phasenkodierung*, der dazu erforderliche Feldgradient als *Phasenkodiergradient* bezeichnet. Das auf diese Weise phasenmodulierte und anschließend frequenzdemodulierte Signal s' besitzt die in Gl. (4-6) auf Seite 92 gewünschte Eigenschaft: Die Modulationsfunktion ist genau die gesuchte Translation in l -Richtung im Spektralbereich!

Ein anschließendes Messintervall, in dem das Hf-Feld unter Anbringung des x -Gradienten aufgezeichnet wird, liefert nun ein Signal, das einen parallel zur k -Achse verschobenen Schnitt $G(k;l_p)$ durch das Spektrum der Schichtfunktion $g(x,y)$ beschreibt. In einer Folge von Aufnahmezyklen muss nun jeweils die Amplitude des y -Gradienten so inkrementiert werden, dass der Spektralbereich auch in der l -Dimension vollständig abgetastet wird. Der für die Dephasierung erforderliche gleichbleibende negative x -Gradient wird dabei mit dem zu inkrementierenden y -Gradienten kombiniert, so dass für eine vollständige Schichtrekonstruktion eine Folge von Messvorgängen mit der in Bild 4-18 skizzierten Fortschaltung kombinierter Phasenkodier-Dephasierungs-Gradienten in der xy -Ebene erfolgen muss.

Jeder individuelle Messvorgang läuft nach der in Bild 4-19 gezeigten Impulssequenz ab. Eine anschließende inverse 2D-DFT liefert die Schichtfunktion $g(x,y)$. Um das interessierende Volumen in z -Richtung komplett durchzuschichten, müssen weitere vollständige Messvorgangsfolgen nach Anregung mit einer entsprechend variierten Anregungsfrequenz ω_a gefahren werden, siehe Seite 94.

4.3.4 Technische Voraussetzungen

Die wichtigste Voraussetzung für die Realisierung des MR-Bildgebungsverfahrens ist ein Magnet mit möglichst hoher Feldstärke sowie extrem hoher Zeitkonstanz und Feldhomogenität im Bereich des Messvolumens. Von der Feldstärke ist das erreichbare Signal/Rausch-Verhältnis direkt abhängig.

4.3 Magnetresonanz-Tomographie (MR)

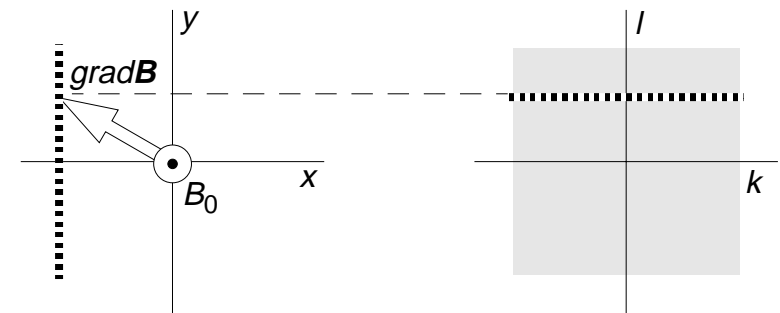


Bild 4-18

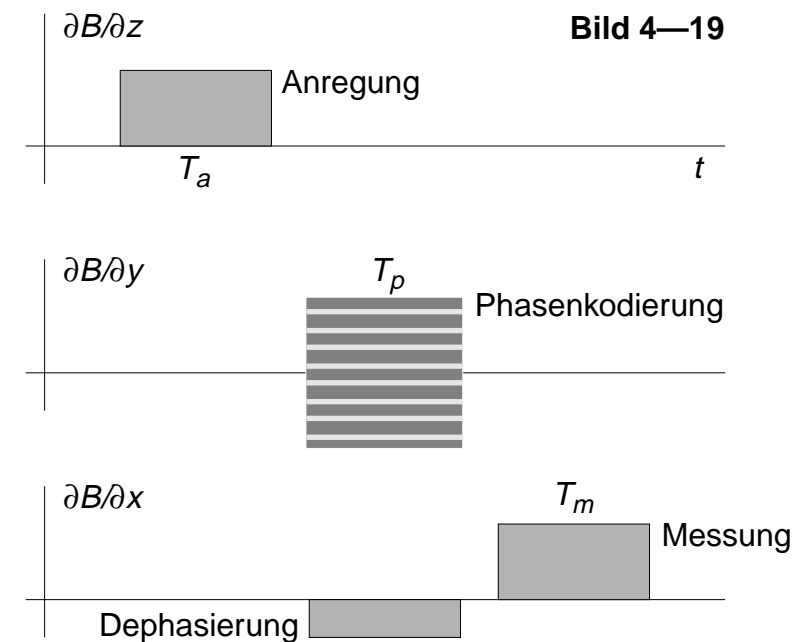


Bild 4-19

4 Die 3D-Rekonstruktion aus Projektionen

Durchgesetzt haben sich heute supraleitende Magnete, die standardmäßig mit einer magnetischen Flussdichte von 1...2 Tesla ausgeliefert werden. Für experimentelle Systeme sind Magnete bis ca. 8 Tesla in Betrieb. Mit konventionellen Gleichstrommagneten (sogenannte "Widerstandsmagneten") ist experimentiert worden. Nachteile sind die hohe erforderliche Konstanz der Stromversorgung und Energieverbrauch. Grundelement eines solchen Magneten ist eine Helmholtzspule. Permanentmagnete sind bis etwa 0,5 Tesla realisiert worden. Über weitere Spulen werden die Gradienten- und Korrekturfelder zugeschaltet.

Anregung und Messung erfolgen über spezielle Hf-Antennenspulen. Wenn oberflächennahe Strukturen abgebildet werden sollen, können die Antennenspulen so ausgelegt sein, dass das Hf-Feld auf diese Bereiche konzentriert wird. Auf diese Weise kann in kleinen Abbildungsvolumina das Signal/Rausch-Verhältnis zugunsten der Ortsauflösung gesteigert werden. Bild 4—20 zeigt ein MR-System mit supraleitendem Magnet (Werkbild Philips). Bild 4—21 zeigt Beispiele von MR-Bildern aus dem Schädel- und Beckenbereich.

4.3 Magnetresonanz-Tomographie (MR)



Bild 4—20

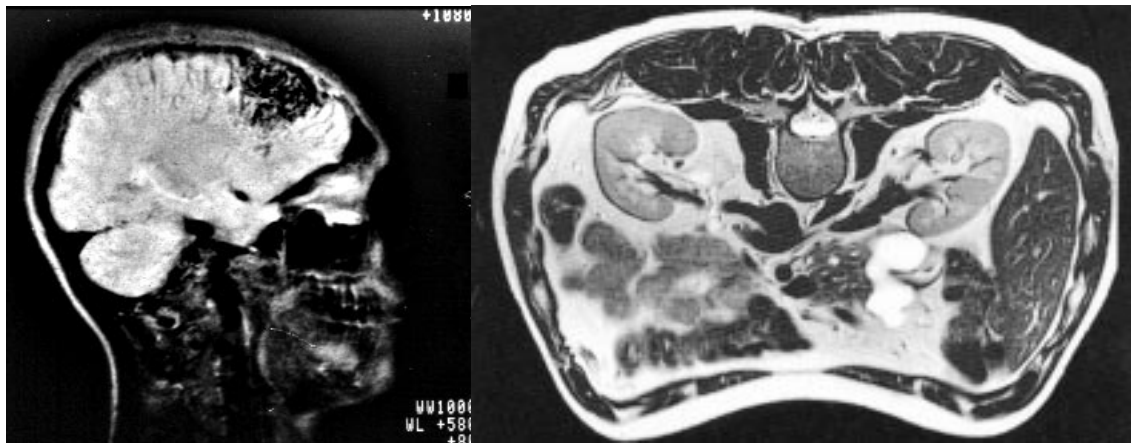


Bild 4—21

4.4 Dreidimensionale Abbildung von Isotopenverteilungen

Die ortsselektive Erfassung der Dichte bzw. Aktivität von Gamma-strahlenden Substanzen ist in der Nuklearmedizin gebräuchlich. Mit Abbildungssystemen nach dem Prinzip der Gamma-Kamera — siehe Abschnitt 3.5 auf Seite 71 — können zweidimensionale Projektionsbilder aufgenommen werden. Die Weiterentwicklung dieser Abbildungstechnik zu dreidimensionalen Rekonstruktionsverfahren ist in zwei prinzipiell unterschiedlichen Richtungen verlaufen, der *single-photon-emission computed tomography* (SPECT) und der *positron-emission tomography* (PET).

4.4.1 SPECT-Bildgebung

Das Prinzip der SPECT-Bildgebung setzt auf die Verwendung modifizierter Gamma-Kameras auf. Bei der Verwendung von Parallel-Kollimatoren liefert dieses Messverfahren die Summation der örtlichen Isotopendichte innerhalb des jeweils von einem Kollimatorschacht erfassten stabförmigen Objektvolumens. Werden mit einer Anordnung von mehreren ringförmig um den Patienten angebrachten Gamma-Kameras gleichzeitig entsprechend viele Projektionen aufgenommen, dann kann damit im Prinzip eine CT-artige 3D-Rekonstruktion durchgeführt werden, Bild 4—22.

Problematisch ist dabei das extrem niedrige Signal/Rausch-Verhältnis. Weiterhin beeinträchtigt die Absorption des Objekts die Rekonstruktion: Im Gegensatz zur Röntgen-CT soll die Strahlungsaktivität und nicht die (absorbierende) Materialeigenschaft pro Voxel gemessen werden. Eine geschlossene Lösung dieses inversen Problems existiert nur für homogen absorbierende Körper. Da dies in medizinischen Anwendungen nicht gegeben ist, greift man auf iterative Rekonstruktionsalgorithmen zurück, wie sie in der Anfangszeit auch für die Röntgen-Computertomographie verwendet wurden (z.B. das ART-Verfahren).

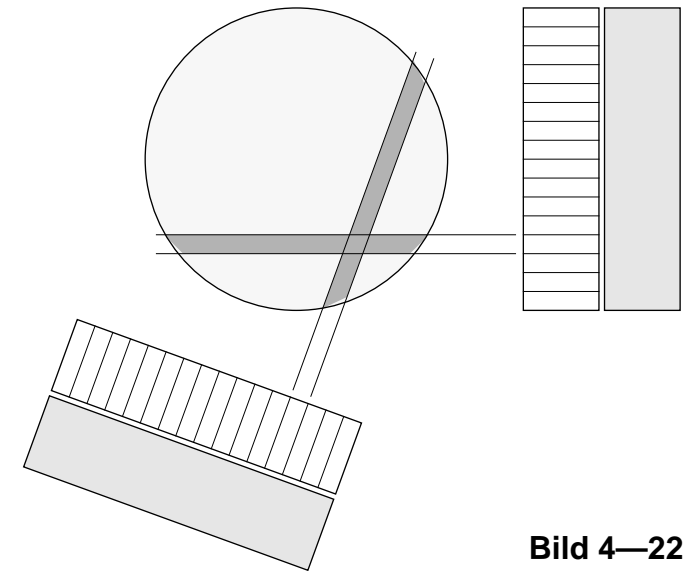


Bild 4—22

4.4.2 PET-Bildgebung

Auf einem gänzlich unterschiedlichen Ansatz beruht die Positronen-Emissions-Tomographie. Die Indikatorsubstanz besteht in diesem Fall aus stoffwechselaktiven Molekülen, die ein Positronen-emittierendes Isotop (z.B. ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O oder ^{18}F) enthalten. Das von einem solchen Atom abgegebene Positron vereinigt sich unmittelbar mit einem Elektron ("positron annihilation"). Die von den beiden Teilchen verkörperte äquivalente Energie wird umgesetzt in zwei in Gegenrichtung zueinander mit einer Energie von 511 keV abgestrahlten Photonen, Bild 4—23.

Um das Messvolumen herum wird ein ringförmiger Detektorarray angeordnet. Zu registrieren sind *zeitgleiche* Ereignissen. Auf der Sehne zwischen den beiden daran beteiligten Detektorelementen ist das auslösende Ereignis zu allokkieren. Jedes Ereignis gibt einen Beitrag für eine Rückprojektion, die wiederum durch einen iterativen Ansatz zu korrigieren ist.

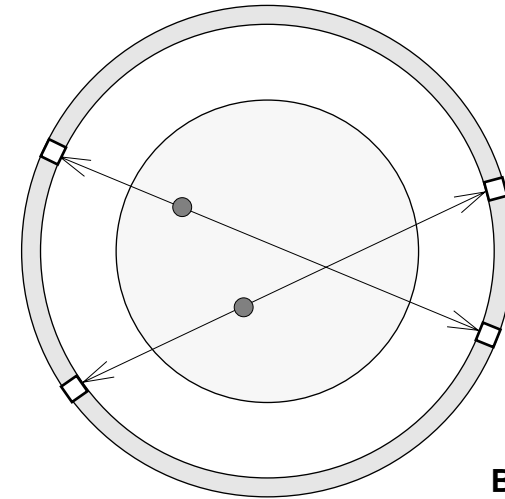


Bild 4—23

5 Restauration und Enhancement

5.1 Ziele einer Bild(nach)verarbeitung

Eine scharfe Abgrenzung zwischen dem Abbildungsprozess und einer an diesen anschließenden, den Bildinhalt optimierenden Bearbeitung lässt sich wohl kaum definieren. Sehen wir die Aufgabe eines Abbildungsprozesses darin, dass ein Objekt oder eine Szene innerhalb der physikalisch, technisch und/oder methodisch auferlegten Grenzen (Grenzen der Auflösung, Ausdehnung, Dimensionalität etc.) so vollständig und realitätsgetreu wie möglich in einem Bilddatensatz repräsentiert wird, dann zählen mindestens alle Nachverarbeitungsschritte zum Abbildungsprozess, mit denen Vorinformationen über das physikalische Abbildungssystem, über abbildungsrelevante Objekteigenschaften und äußere abbildungsbeeinflussende Randbedingungen zur Kompensation von Abbildungsfehlern genutzt werden. Eine Bildnachverarbeitung mit diesem Ziel wird mit dem Fachterminus *Bildrestauration* (engl. „image restoration“) bezeichnet.

Ein weitergehendes Ziel kann es sein, die vom primären Abbildungsprozess gelieferte Information bereits im Hinblick auf die Auswertungsaufgabe so zu verdichten, dass auswertungsrelevante Objekte, Objekteigenschaften oder Objektbereiche hervorgehoben und Bildinhalte, die vom Auswertungsziel ablenken, unterdrückt werden. Für Verarbeitungsschritte, die diesem Ziel dienen, hat sich der Begriff *image enhancement* geprägt, für den sich keine treffende deutsche Übersetzung anbietet.

Das Kriterium einer Nachverarbeitung im Sinne einer Bildrestauration kann streng definiert werden: „Nutze alles Vorwissen zur weitestgehenden Kompensation nichtidealen Verhaltens des (physikalischen) Abbildungssystems, approximiere eine ungestörte Abbildung bestmöglich!“ Schwieriger ist es, Kriterien für ein Enhancement allgemein zu definieren. Hier kommt das

spezielle Auswertungsziel ins Spiel, bei einer maschinellen Auswertung die Auswertestrategie und –technik, bei einer visuellen Auswertung Wahrnehmungsstrategien und subjektive Komponenten.

Bezüglich der Verarbeitungsfunktionen, d.h. der Operationen, mit denen die gewünschten Verarbeitungsergebnisse erzielt werden, lassen sich die beiden Zielrichtungen kaum trennen: Zur Verfügung steht ein Repertoire von Filter- und Transformationsfunktionen, mit denen durch Variation der Parametrisierung ganz unterschiedliche Ziele verfolgt werden können — bis hin zu einer künstlerischen Umgestaltung eines gegebenen Bildes. Mittlerweile werden die gängigen Funktionen für diese Aufgabe bereits in den populären Anwendungsprogrammen zur Bearbeitung von Fotos angeboten¹. Sie haben eine verwirrende Vielzahl unterschiedlicher Namen, sind im allgemeinen undurchschaubar in ihrem numerischen Ablauf, und ihre Zusammenstellung folgt eher ihren Effekten als ihren Wirkungsprinzipien. Entsprechend diffus ist das Verständnis des Begriffs „Bildverarbeitung“.

Als Ansatz für eine Systematisierung werden hier die Verarbeitungsmechanismen und die sich daraus ergebenden Operationsabläufe gewählt. Den hier zu verfolgenden Zielen entsprechend werden dabei ausschließlich solchen Operationen behandelt, die Bilder aus Bildern produzieren². Für diese Klasse der Bildoperationen finden wir in der Fachsprache bezeichnenderweise Namen wie „ikonische Operationen“, „early vision processes“ oder „image primitives“. Dabei können mehrere Quellbilder zu einem Zielbild verknüpft werden (*dyadische* Operationen) oder aus einem Quellbild mehrere Zielbilder hervorgehen. Die für die hier zu behandelnden Aufgaben benötigten Operationen sind jedoch im allgemeinen *monadische* Operationen, d.h. die Operation erzeugt *ein* Zielbild aus *nur einem* Quellbild.

-
1. Beispiel: Adobe „Photoshop“®
 2. Operationen, die Bilder zu nichtbildhaften Daten verdichten, werden in Teil B *Bildanalyse* behandelt; Operationen, die aus nicht-bildhaften Daten Bilder produzieren, sind die algorithmische Grundlage der *Computergrafik*.

5.2 Monadische Bildoperationen

Operationen, die ein Zielbild g_2 aus einem Quellbild g_1 produzieren, sollen im folgenden nach dem Typ der Beziehung zwischen Quellbild-Pixel(n) und Zielbild-Pixel(n) systematisiert werden. Die Darstellung dieser Beziehung kann in zweierlei Weise erfolgen:

1. *Vorwärts-gerichtet* („source driven“, Bild 5—1)
Der Algorithmus wird nach der Strategie „zu welchen Zielbild-Pixel(n) trägt ein Quellbild-Pixel in welchem Maße bei?“ aufgestellt
2. *Rückwärts-gerichtet* („destination driven“, Bild 5—2)
Der Algorithmus wird nach der Strategie „welche Quellbild-Pixel tragen in welcher Weise zu einem Zielbild-Pixel bei?“ aufgestellt

Sobald nun die Menge der Quellbild-Pixel nicht mehr *eineindeutig auf* die Menge der Zielbild-Pixel (injektiv: Abbildung = Umkehrabbildung) abgebildet werden kann — was praktisch für alle Operationsklassen außer den Bildpunktoperationen, Abschnitt 5.3, gilt —, kann bei einer vorwärtsgerichteten Betrachtung die Erfüllung der Forderung, dass jedes Zielbild-Pixel einmal und nur einmal berechnet wird, zu nichttrivialen algorithmischen Problemen führen. Unproblematischer lässt sich der Algorithmus unter dieser Forderung aus der rückwärtsgerichteten Betrachtung aufstellen: Wenn die Berechnung vom Zielbild-Pixel ausgeht, ist es unerheblich, ob einzelne Quellbild-Pixel ausgelassen oder mehrfach einbezogen werden.

Weiter werden die folgenden Betrachtungen zunächst auf *homogene* Bildoperationen beschränkt. Homogenität liegt vor, wenn die Gesetzmäßigkeit zwischen Zielbild-Pixel und Quellbildpixel(n) ortsunabhängig ist, d.h., dass die Zielbild-Pixel nach einer für den gesamten Bildraum einheitlich geltenden, orts- und bildinhaltsunabhängigen Vorschrift errechnet werden.

Monadische Bildoperationen können unter anderem auf der Basis ihrer ortsmäßigen Relationen zwischen Zielbild- und Quellbild-Pixel(n) klassifiziert werden:

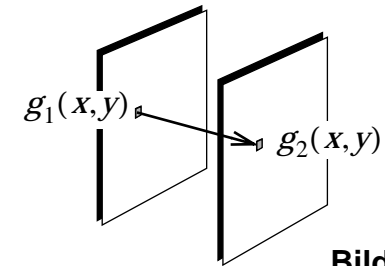


Bild 5—1

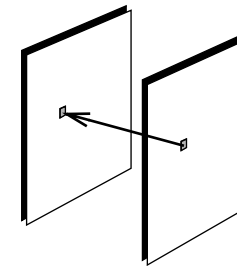


Bild 5—2

- *Punkt-Operationen* (Bild 5—3) → Seite 105
Ein Zielbild-Pixel ist eine beliebige Funktion allein des ihm ortsmäßig zugeordneten Quellbild-Pixels. Da Punktoperationen die inhaltlichen Strukturen nicht antasten, sondern lediglich die Pixelamplitude gesetzmäßig verändern, werden sie auch als *Grauwert- oder Kontrast-Transformationen* bezeichnet.
- *Lokale Operationen* (Gl. Bild 5—4) → Seite 110
Ein Zielbild-Pixel ist eine Funktion mehrerer Pixel aus der Region um das dem Zielbild-Pixel ortsmäßig zugeordnete Pixel herum. Der Einflussbereich des Quellbildes ist im allgemeinen klein gegenüber den Bildabmessungen. Im englischen Sprachgebrauch ist daher der Terminus „neighbourhood operations“ gebräuchlich.
- *Globale Operationen* (Bild 5—5) → Seite 125
Jedes Zielbild-Pixel ist eine Funktion der Gesamtheit *aller* Quellbild-Pixel. Wichtige Vertreter dieser Klasse für die hier vorliegenden Aufgabenstellungen sind die Orthogonaltransformationen, hier vor allem die diskrete Fourier-Transformation (DFT).
- *Geometrische Operationen* (Bild 5—6) → Seite 128
Die Zielbild-Pixel ergeben sich durch eine systematische Verschiebung der Quellbild-Pixel. Die Verschiebung in Richtung und Weite ist eine im allgemeinen stetige Funktion des Ortes, die die inhaltlichen Beziehungen nicht auflöst. Format-Transformationen, Translation und Rotation sowie geometrische Verzerrungen oder Entzerrungen gehören zu dieser Klasse.

Alle genannten Operationsklassen haben über ihre Anwendung für die Restauration und das Enhancement hinaus allgemeine Bedeutung für die Bildverarbeitung. So dienen sie z.B. als ikonische Vorstufe der Bildanalyse (Teil B). Wesen und Eigenschaften häufig benötigter Vertreter der oben definierten Klassen sollen daher im folgenden erläutert werden.

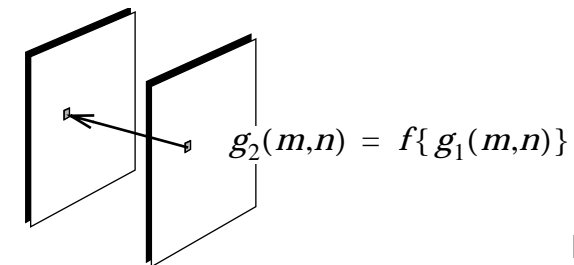


Bild 5—3

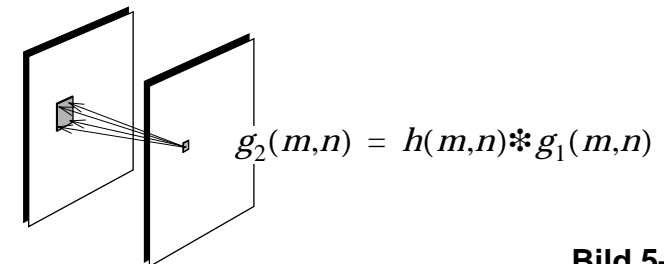


Bild 5—4

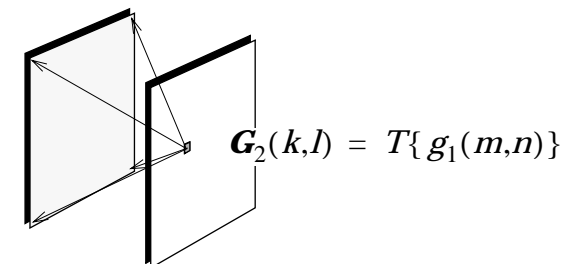


Bild 5—5

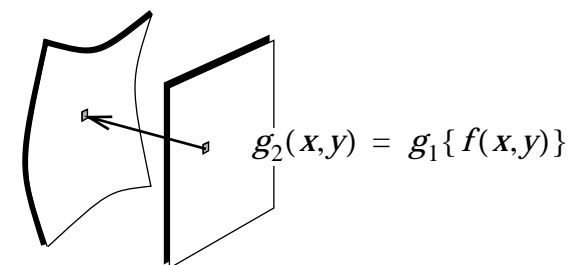


Bild 5—6

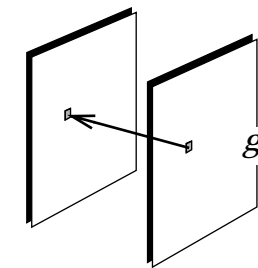
5.3 Punkt-Operationen

Die elementare (d.h. die homogene, nicht vom Bildinhalt abhängige) Punktoperation erfüllt die Aufgabe, zwischen den Funktionswerten des Zielbildes und des Quellbildes pixelweise eine beliebige Relation herzustellen, Gleichung (5-1). Da die Bildfunktionswerte häufig Helligkeiten (= Grauwerte) oder Helligkeitsdifferenzen (= Kontrastwerte) repräsentieren, wird diese Operation auch als Grauwert- oder Kontrasttransformation bezeichnet, die Funktion selbst entsprechend als (Grauwert- bzw. Kontrast-) Transformationskennlinie, Bild 5-7.

5.3.1 Allgemeine Grauwert- bzw. Kontrasttransformation

Punkt-Operationen werden im allgemeinen als Tabellen („look-up table“) implementiert: Die Transformationskennlinie wird für alle Quantisierungsstufen des Quellbildsignals errechnet oder ermittelt und als Tabelle abgespeichert. Die Ausführung der Operation besteht in einem Tabellenzugriff pro Pixel, bei dem der Quellbild-Pixelwert jeweils als Tabellenindex dient (bei einer Hardware-Realisierung als Adresse des Tabellenspeichers). Da der Rechenaufwand zur Erstellung der Tabelle nur einmal für die Vorbereitung der Operation zu leisten ist, unterliegt der Kennlinienverlauf kaum Einschränkungen: Abschnittsweise lineare Kennlinien können genauso wie beliebig gekrümmte stetige oder nichtstetige Kennlinien realisiert werden. Einzig ist Eindeutigkeit gefordert. Soll vom Zielwert auf den Quellwert zurückgerechnet werden können, muss Eineindeutigkeit gegeben sein.

Zu bedenken ist der Einfluß der Operation auf den Quantisierungsfehler. Abhängig von der Steilheit der Transformationskennlinie sind entweder jeweils mehrere Quellbild-Niveaus einem Zielbild-Niveau zugeordnet, oder die Zielbild-Niveaus sind nicht mehr durchgängig besetzt. In jedem Fall erhöht sich das Quantisierungsrauschen. In aufgespreizten Grauwertbereichen können Artefakte durch Pseudokonturen auftreten (Bild 5-8).



$$g_2(x,y) = f\{g_1(x,y)\} \quad (5-1)$$

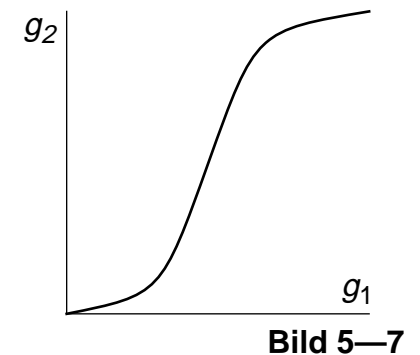


Bild 5-8

Anwendung findet die Punkt-Operation sowohl für die Restauration als auch für Enhancement-Zwecke. Als Restauration ist hier die Kompensation nichtlinearer Kennlinien von Bildsensoren oder Zwischenbildprozessen anzusehen. So hat beispielsweise Silberhalogenid-Film gewöhnlich eine S-förmige Kennlinie, deren Gradient von der Aussteuerung abhängt. Mittels einer dazu inversen Kennlinie kann die Bildaufnahmekette linearisiert werden (Bild 5—9).

Möglichkeiten zum Enhancement ergeben sich, wenn die für die Interpretation oder Auswertung eines Bildes wichtigen Strukturen bevorzugt in eingrenzenden Grauwertbereichen liegen. Eine einfache Situation liegt vor, wenn die abgebildete Objekteigenschaft z.B. bezüglich ihrer physikalischen Größe reproduzierbar in Grauwerte abgebildet wird und diese Eigenschaft abschnittsweise relevant ist. Wir finden diese Situation in der Computertomographie: Abgebildet wird bei der Röntgen-CT der Schwächungsindex (Abschnitt 4.2.3 Seite 87). Da dieser über einen weiten Bereich variiert, die Darstellung von Gewebe und Flüssigkeiten aber nur einen sehr kleinen Teilbereich ausfüllt (siehe Bild 5—10), wird für die Darstellung üblicherweise ein „Grauwertfenster“, d.h. eine abschnittsweise lineare Transformationskennlinie eingesetzt, die den diagnostisch relevanten Messbereich über den gesamten Helligkeitsbereich des Displays spreizt.

5.3.2 Histogramm-Equalisierung

Im allgemeinen liegt eine explizite quantitative Zuordnung der Bildfunktionswerte zu den Objekteigenschaften, auf deren Basis eine relevanzbasierte Transformation entworfen werden kann, nicht vor oder sie variiert von Bild zu Bild infolge unterschiedlicher Aufnahmebedingungen, evl. sogar auch innerhalb eines Bildes selbst. Ein tragfähiger Ansatz ist in diesen Fällen, von der relativen Häufigkeit des Auftretens von Grauwerten auf deren Relevanz bezüglich des Bildinhalts zu schließen: Bereiche der Grauwertskala, die dicht besetzt sind, weisen auf näherungsweise homogene Bild-

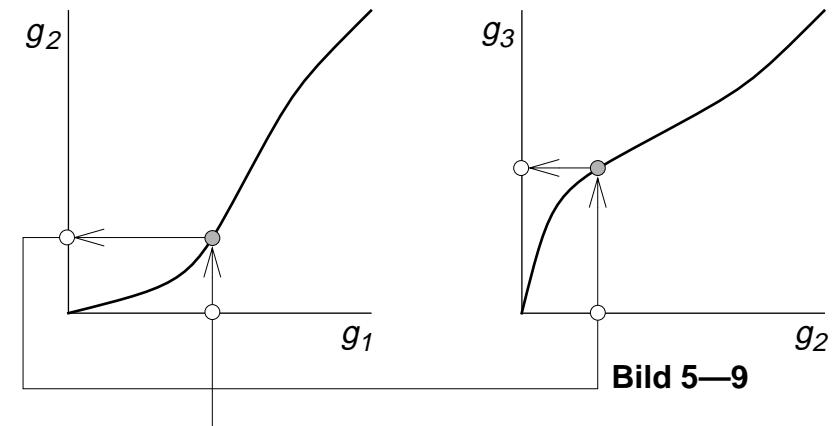


Bild 5—9

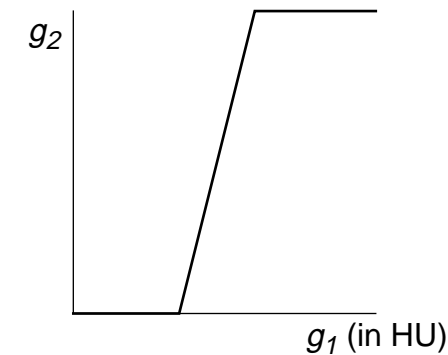


Bild 5—10

partitionen hin. Sinnvoll kann es sein, diese Grauwertbereiche zu spreizen, um in homogenen Partionen die Visualisierung von Feinkontrasten zu verbessern. Dünnbesetzte Bereiche der Grauwertskala sind im Gegenzug zu komprimieren (Bild 5—11). Bild 5—12 zeigt ein Beispiel.

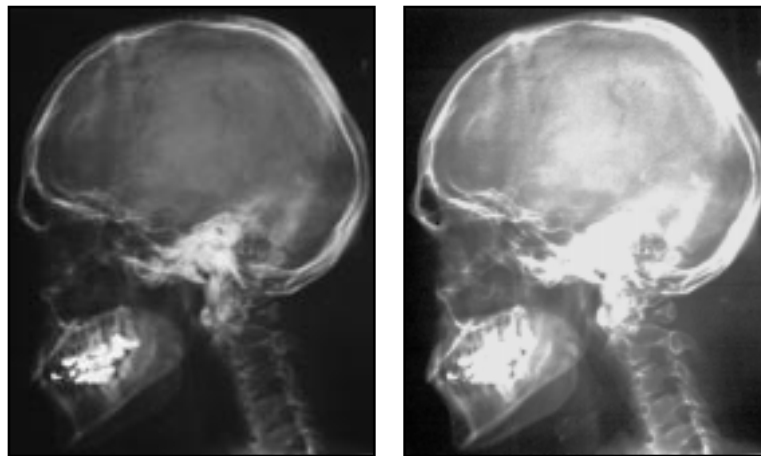


Bild 5—12

Eine etablierte Strategie für den systematischen Entwurf einer hierfür geeigneten Transformationskennlinie besteht darin, mit der Transformation eine Gleichverteilung der Auftretshäufigkeiten („Equalisierung“) der Grauwertniveaus im Zielbild zu erreichen. Ausgangspunkt ist sinngemäß die Häufigkeitsfunktion — das *Histogramm* $h_i(g_1)$, siehe auch Seite 146 — der Grauwerte im Quellbild. Flächenabschnitte unter diesem Funktionsgraphen repräsentieren die Anzahl von Bildpunkten, die in das der Breite des jeweiligen Abschnitts entsprechende Grauwertintervall fallen. Ein equalisiertes Histogramm wird geschaffen, wenn flächengleiche Rechtecke unter dem Histogramm auf äquidistante Intervalle der Grauwertskala abgebildet werden (Bild 5—13). Dies wird durch eine Transformationskennlinie erreicht, deren Gradient jeweils dem Funktionswert des Histogramms proportional ist. D.h., die Transformationskennlinie ist durch das Integral des Histogramms — *kumulatives Histogramm* $H_i(g_1)$ — gegeben. Im allgemeinen muss die so ermittelte Transformationkennlinie noch geglättet werden.

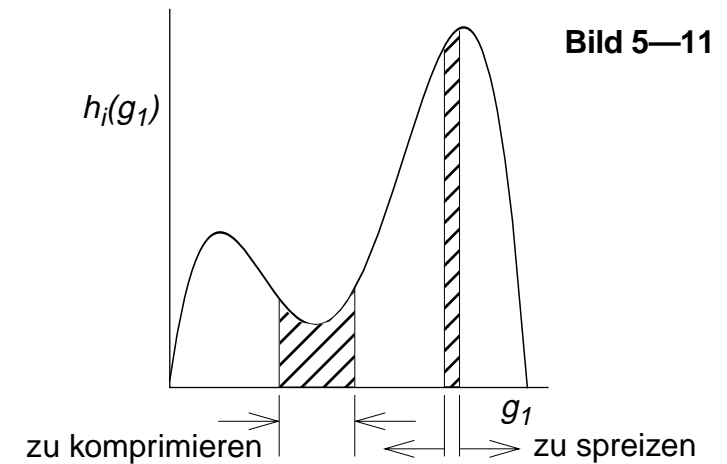


Bild 5—11

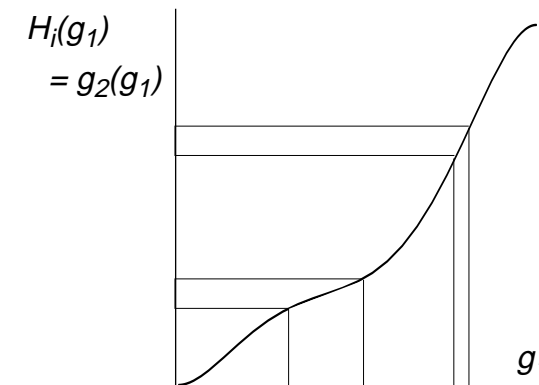


Bild 5—13

5.3.3 Adaptive Histogramm-Equalisierung

Gute Ergebnisse erzielt die Histogramm-Equalisierung, wenn Bildmaterial vorliegt, dessen Inhalt relativ homogen ist: Die Grundhelligkeit variiert wenig, die relevanten Objekte oder Partitionen liegen in einem engen Helligkeitsbereich. Charakteristisch für solche Bilder sind Histogramme mit einem oder mehreren ausgeprägten Maxima. Dagegen *nivelliert* beispielsweise eine starke Variation der Grundhelligkeit das Histogramm, so dass eine Equalisierung kaum Effekte bringt, obwohl dies in Teilbereichen durchaus der Fall sein könnte. Angebracht wäre in solchen Situationen eine *lokal begrenzte* Equalisierung, d.h. die Berechnung des Histogramms jeweils nur eines Teilbildes, das ein genügend homogenes Gebiet umfasst.

Eine Zerlegung des Bildes ist jedoch nicht angebracht, da der Bildinhalt nicht durch Zerteilen des Bildes aufgelöst werden darf. Eine lokal begrenzte Histogramm-Equalisierung ohne Zerlegung des Bildes könnte erreicht werden, indem für jedes Pixel ein *individuelles* Histogramm innerhalb seiner lokalen Umgebung bestimmt und aus diesem der transformierte Wert ermittelt wird (Bild 5—14).¹ Da dieser wandernde Bildausschnitt eine repräsentative Anzahl von Pixeln umfassen muss (z.B. 100^2), ist die Vorgehensweise extrem rechenaufwendig.

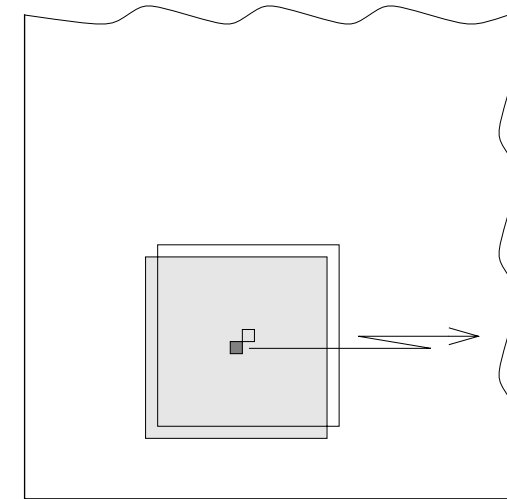


Bild 5—14

-
1. Hier schwimmt die Grenze zu den lokalen Operationen (Abschnitt 5.4 Seite 110), denn durch die Mitführung des Analysebereiches wird die Operation gewolltermaßen abhängig vom lokalen Bildinhalt — auch wenn der letzte Schritt wiederum eine Punktoperation ist.

Einen tragbaren Kompromiss, mit dem gute Ergebnisse bei erträglichem Rechenaufwand erzielt wurden, ergibt die folgende Strategie: Das zu transformierende Bild wird schachbrettmäßig in Teilbilder der Größe M', N' aufgeteilt, Bild 5—15. Von jedem Teilbild wird das Histogramm ermittelt und aus diesem eine Transformationskennlinie t_i errechnet. Für jedes Pixel werden nun Transformationswerte aus der Kennlinie seines Teilbildes sowie aus den Kennlinien der zur Pixelposition nächstgelegenen horizontalen, vertikalen und diagonalen Nachbarpartikel gebildet. Die vier Transformationswerte werden nach Gl. (5-2) gewichtet mit dem Abstand m', n' des Pixels vom Zentrum (Teilungspunkt) des jeweiligen Teilbildes aufsummiert. Auf diese Weise werden Unstetigkeiten im Grauwertverlauf des transformierten Bildes vermieden.

Entscheidend für die Erzielung brauchbarer Ergebnisse ist eine günstige Wahl der Teilbildgröße: Zu kleine Teilbilder können leicht zu starken Variationen der effektiven Transformationskennlinie über kurze Distanzen und damit zu Verfälschungen des Bildinhaltes führen. Zu große Teilbilder können dagegen die Transformation effektlos machen.

Die Beschränkung auf kleine Areale kann zudem zu Histogrammen mit sehr ausgeprägten Maxima führen, wenn ein Teilbild gerade nur einen relativ homogenen Bildausschnitt erfasst; die aus einem solchen Histogramm resultierende Transformationskennlinie würde übermäßig steile Abschnitte aufweisen. Um dies zu umgehen, sollten die Teilbildhistogramme vor Errechnung der Transformationskennlinie „geklippt“ werden, d.h. ihre Maxima sollten auf das 5- bis 10-fache des Mittelwertes begrenzt werden (Bild 5—16)¹.

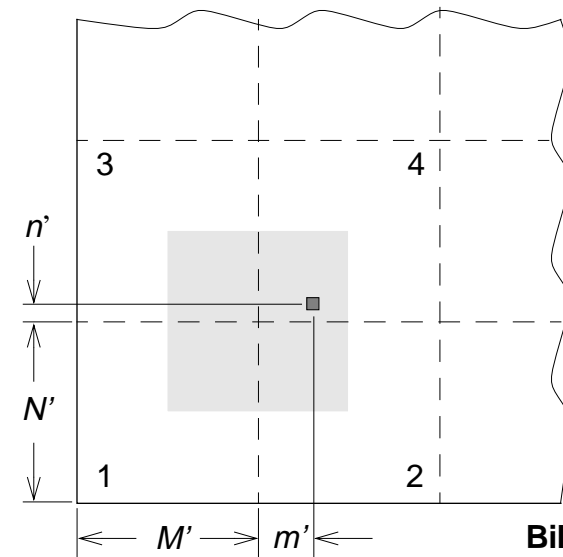


Bild 5—15

$$g_2(m', n') = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 c_i \cdot t_i\{g_1(m', n')\}$$

$$c_i = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{m'}{M'}\right) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{n'}{N'}\right) \quad (5-2)$$

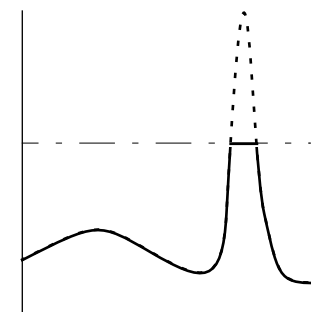


Bild 5—16

1. Dieser Vorschlag führt zu der von Pizer vorgeschlagenen „Kontrast-begrenzten adaptiven Histogrammequalisierung“ (contrast-limited adaptive histogram equalization, CLAHE).

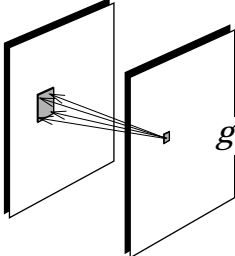
5.4 Lokale Operationen

Das Kennzeichnende aller lokalen Operationen ist die Berechnung des Zielbild-Pixels nach einem festgelegten Schema aus dem positionsmäßig zugeordneten Quellbild-Pixel sowie den Pixeln in dessen unmittelbarer Umgebung. Die jeweils benötigten Pixel werden wie von einer mit dem Zielbild-Pixel mitgeführten „Maske“¹ erfasst und nach einer mit der Maske deckungsgleichen „Schablone“ zum jeweiligen Zielbild-Pixel verrechnet. Maske und Schablone können nach einer beliebigen Strategie über das Bild geführt werden, wenn dabei jedes Zielbild-Pixel einmal und nur einmal bestimmt wird.²

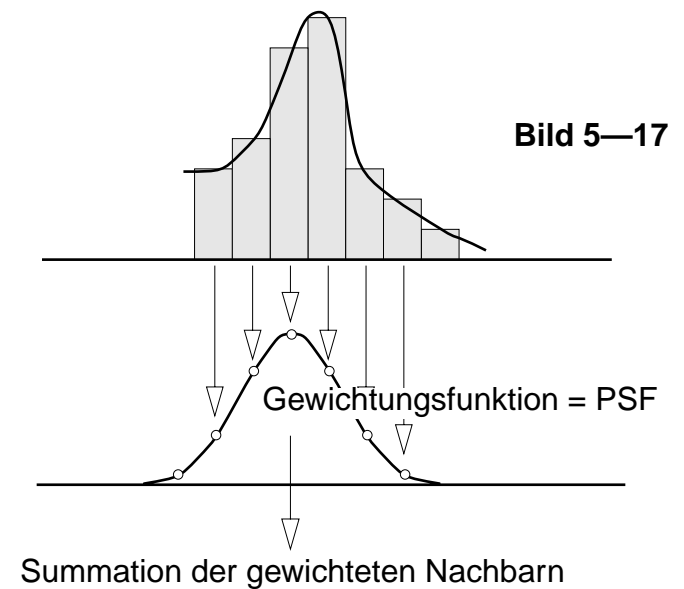
5.4.1 FIR-Filter

Der wichtigste Vertreter des Typs lokale Operation ist die Faltung: Der Faltungsalgorithmus kann als Subklasse der *linearen, ortsinvarianten* lokalen Operationen, auch als LSI-Filter bezeichnet, eingeordnet werden, siehe Abschnitt 1.3 Seite 29. Die „Schablone“ besteht in diesem Fall aus den Faltungskoeffizienten, gibt also die Gewichte an, mit denen die innerhalb der „Maske“ liegenden Pixel zum Zielbild-Pixel aufsummiert werden, Gl. (5-4) und Symbolgleichung (5-3). Die „Schablone“ kann somit als die um 180° gedrehte (!) PSF identifiziert werden (siehe hierzu auch Abschnitt 5.4.2 Seite 116). Da die Punktantwort dieser Operation durch die Schablone bestimmt wird, also auf die Abmessungen der Schablone begrenzt ist, wird dieser Filtertyp in Anlehnung an die Terminologie der Signalverarbeitung auch *FIR-Filter* (*finite impulse response filter*) genannt, Bild 5—17.

1. Lokale Operationen werden zwar auch als „Maskenoperationen“ bezeichnet — man sollte den Begriff jedoch in diesem Zusammenhang vermeiden.
2. Ausnahme: rekursive Operationen, siehe Seite 117



$$g_2(m, n) = h(m, n) * g_1(m, n) \quad (5-3)$$

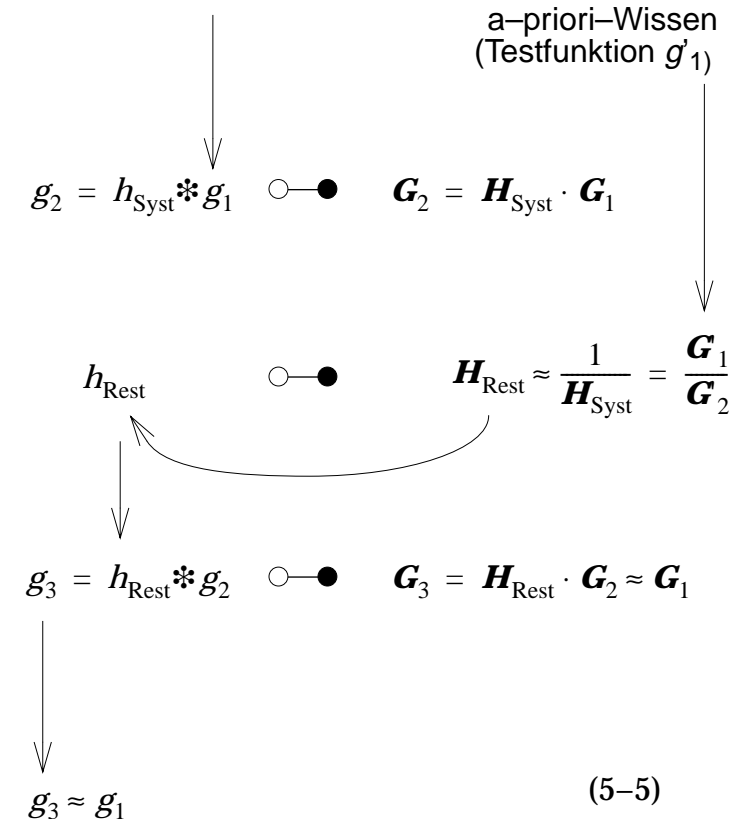


$$g_2(m, n) = \sum_{m'} \sum_{n'} h(m', n') \cdot g_1(m - m', n - n') \quad (5-4)$$

Für die Bildrestauration spielen FIR-Filter eine unverzichtbare Rolle, wenn der Verlauf einer Übertragungsfunktion (OTF bzw. MTF) des Bildaufnahme-systems oder der Bildübertragungskette $H_{\text{Syst}} \neq 1$ zu $H_{\text{Syst}} \cdot H_{\text{Rest}} = 1$ kompensiert werden soll. Dazu muss als Faltungskern eine PSF h_{Rest} ermittelt werden, deren Transformierte H_{Rest} den Reziprokwert der System-OTF H_{Syst} möglichst gut approximiert, Gl. (5-5). Einer Restauration mittels inversem FIR-Filter sind aus mehreren Gründen Grenzen gesetzt:

- Um den Faltungskern zu begrenzen — wegen des Rechenaufwandes evtl. auf relativ kleine Abmessungen — muss die üblicherweise weit ausgedehnte Transformierte der benötigten OTF abgebrochen und approximiert werden. Ein Abbruch im Ortsbereich führt im Spektralbereich grundsätzlich zu ausgedehnten Abweichungen von der gewünschten OTF (Ähnlichkeitssatz, siehe Seite 51), die in ungünstigen Fällen Artefakte hervorbringen können.
- Aus physikalischen Gründen haben Bildaufnahmesysteme Übertragungsfunktionen mit Tiefpasscharakter. Restaurationsfilter mit Hochpasscharakter heben nun ungünstigerweise auch die unvermeidbaren stochastischen Bildanteile (Abschnitt 1.2 Seite 21) gerade in dem für die Bildinterpretation oft relevanteren oberen Spektralbereich an. Eine zu weit gehende Kompensation des MTF-Abfalls zu hohen Wellenzahlen hin kann sich daher eher bildverschlechternd auswirken.¹
- Unmöglich wird die Kompensation schließlich, wenn die OTF des Systems Nullstellen hat (z.B. Aperturfunktion, Spaltfunktion, siehe 2D-rect-Funktion Seite 45).

Andererseits finden FIR-Filter auch eine breite Anwendung zur Erzielung von Enhancementeffekten. Je nach Aufgabenstellung können die gewünschten Effekte entweder durch ein Hervorheben oder durch ein Abschwächen ausgewählter Spektralanteile erreicht werden:



1. Der Weg zu einem Filteransatz, der zu einem „optimalen“ Kompromiss zwischen den konkurrierenden Wünschen führt, wird in Abschnitt 5.4.5 Seite 121 beschrieben.

- *„Harmonisierung“, Nivellierung großflächiger Kontraste*
Großflächige Helligkeitsvariationen bilden sich in Spektralkomponenten mit sehr niedriger Wellenzahl ab. Ihre Abschwächung durch ein *Hochpassfilter*, das nur Spektralanteile in der unmittelbaren Umgebung des Ursprungs abschwächt, gleicht stark unterschiedliche Niveaus der Grundhelligkeit aus und führt damit zu einer Verminderung des Kontrastumfangs eines Bildes. Dies kann für eine anschließende Kontrastverstärkung (siehe Abschnitt 5.3.1 Seite 105) günstige Voraussetzungen schaffen, die wiederum zu einer besseren Detailerkennbarkeit führt.
- *Kanten- und Linienbetonung*
Die für die Kanten- und Linienstrukturen verantwortlichen lokalen Grauwertgradienten liefern Spektralanteile vor allem im oberen Spektralbereich. Filter mit *Hochpass-* oder *Bandpasscharakter* heben diese Strukturen hervor, Bild 5—18.¹
- *Rauschunterdrückung*
Der subjektiv störende Effekt stochastischer Signalanteile resultiert vor allem aus unkorrelierten lokalen Helligkeitsfluktuationen eng benachbarter Pixel. Eine Abschwächung der hohen Spektralanteile mittels eines Filters mit *Tiefpasscharakter* schwächt sinngemäß derartige Störungen durch „Glättung“ der Grauwerte ab, Bild 5—19.

Deutlich wird, dass die Ziele für das Enhancement eines Bildes in Konflikt geraten können. So muss beispielsweise ein Kompromiss zwischen Detailerkennbarkeit und Rauschunterdrückung gesucht werden (siehe Abschnitt 5.4.5 Seite 121). Sehr sorgfältig müssen auch die speziell durch Hochpassfilter produzierten Artefakte auf ihre Wirkung für die Bildinterpretation (siehe Fußnote 2 auf Seite 114) betrachtet werden.

1. Der Unterschied zu dem oben genannten Harmonisierungseffekt liegt lediglich in der Abstimmung der Bandbreite des anzuhebenden Spektralbereichs sowie im Grad der Unterdrückung des Gleichanteils: Bei seiner vollständigen Unterdrückung entsteht ein reines Kanten- und Linienbild, das für Mustererkennungszwecke (siehe Teil B) interessant sein kann.

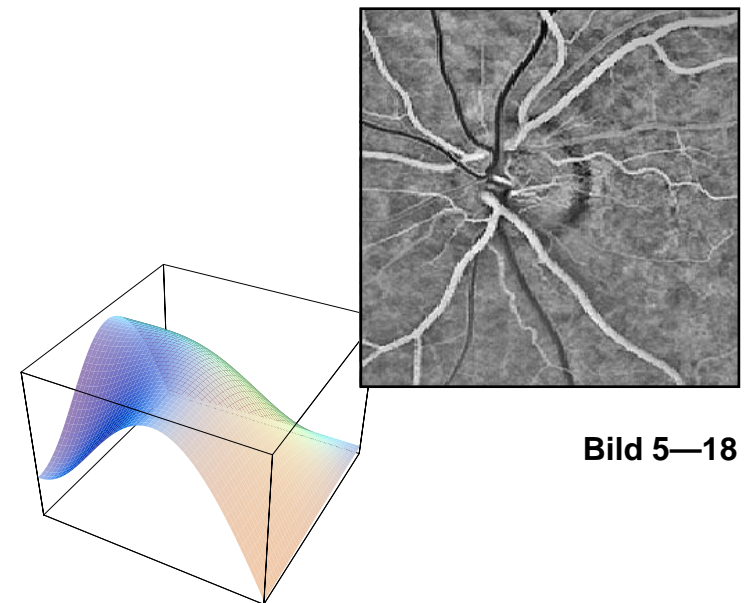


Bild 5—18

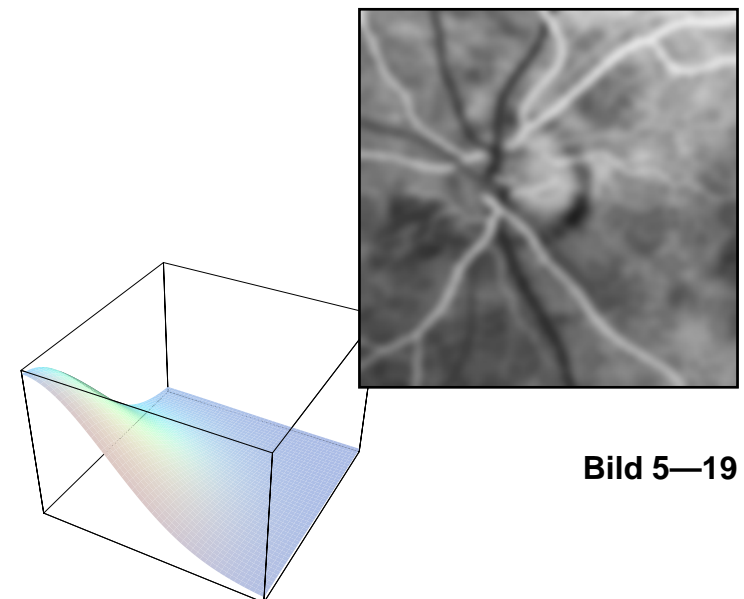


Bild 5—19

Der Ausgangspunkt für den Entwurf eines FIR-Filters ist im allgemeinen die gewünschte oder geforderte MTF¹. Wenn eine Restauration beabsichtigt ist, ist die Filter-MTF als Inverse der MTF des Bildaufnahmesystems vorgegeben, oder sie wird nach Maßgabe eines Optimalfilteransatzes ermittelt (s. Abschnitt 5.4.5 Seite 121). Die MTF von Filtern für Enhancementzwecke oder für die Realisierung spezieller Effekte wird zumeist heuristisch angesetzt. Entsprechend unterschiedlich ist die Vorgehensweise beim Entwurf.

Ist die MTF vorgegeben, kann zunächst nicht davon ausgegangen werden, dass ihre Transformierte eine finite Funktion ist. Sie kann jedoch als Startwert für eine iterative Approximation dienen, mit der ein finiter Faltungskern der gewünschten Ausdehnung entworfen wird, dessen Transformierte die vorgegebene MTF bestmöglich approximiert, Bild 5—20.

Ist es dagegen das Ziel, einen vorgegebenen *Effekt* zu realisieren, sollte versucht werden, auf einfach zu implementierende Standardfilter zurückzugreifen und diese durch Kombination und Variation ihrer Parameter auf die Aufgabe abzustimmen. Von grundlegender Bedeutung ist für diese Zwecke das Gauß-Filter: Da die Transformierte der Gauß-Funktion wiederum eine Gauß-Funktion ist (siehe Abschnitt 2.3.4 Seite 46), ist sowohl im Ortsbereich als auch im Spektralbereich ein monoton abklingendes Verhalten gewährleistet. Die OTF ist außerdem nullphasig. In seiner Grundform weist das Gauß-Filter eine Tiefpass-Filtercharakteristik auf. Seine Grenzwellenzahl kann durch Stauchung der PSF erhöht oder durch Dehnung reduziert werden. Mit Tiefpassfiltern kann eine gewollte Unschärfe erzielt werden, mit der z.B. feingranulare Störstrukturen abgeschwächt werden, allerdings auch Linien und Kanten „verwischt“ erscheinen.

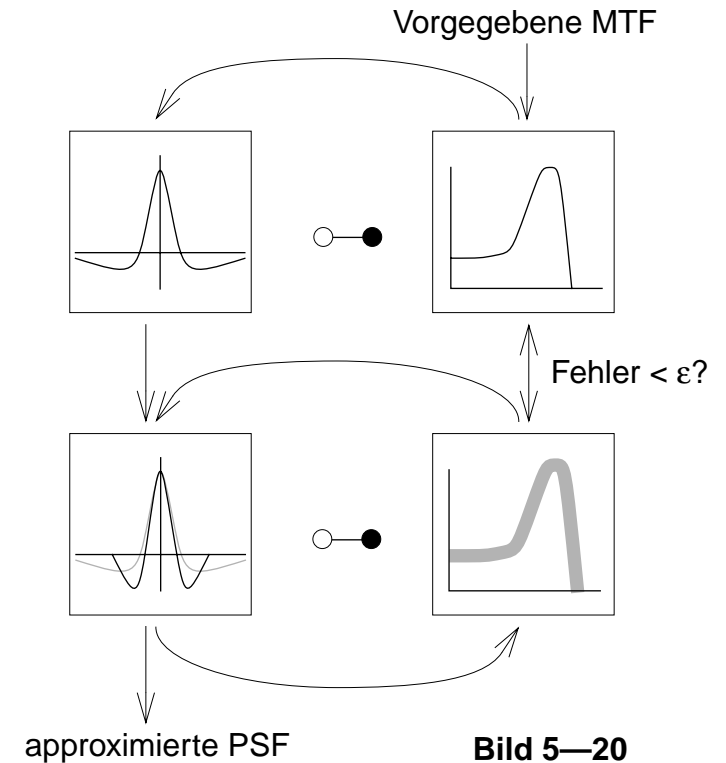


Bild 5—20

1. Da üblicherweise Nullphasigkeit gefordert ist, reicht die Betragsfunktion der OTF als Vorgabe aus.

Für die dazu komplementären Effekte — die Hervorhebung von Linien- und Kantenstrukturen oder die Nivellierung großflächiger Kontraste („Harmonisierung“) — werden Filter mit Hochpass- oder Bandpasscharakteristik benötigt. Mit der Subtraktion einer unscharfen Kopie vom Original, dem „unsharp masking“¹, hat schon die fotografische Labortechnik den Weg gewiesen: Die Abschwächung der Spektralanteile mit niedrigen Wellenzahlen kann grundsätzlich dadurch erzielt werden, dass das Quellbild mit unterschiedlichen Grenzwellenzahlen tiefpassgefiltert wird und die Ergebnisbilder voneinander subtrahiert werden, Bild 5—21.

Da für die Faltungsoperation die Assoziativität gilt, kann die Subtraktion auch bei den Faltungskernen vorgenommen werden, Bild 5—22. Die daraus hervorgehende PSF lässt bereits eine qualitative Bewertung der Filterwirkung zu: Der Verlauf der negativen PSF-Bereiche gibt an, welche ‘Überschwinger’ an Kanten und Linien zu erwarten sind.

Hochpass- oder Bandpassfilter werden vielfach für ein Enhancement eingesetzt, das auf das Hervorheben von Kanten- und Linienstrukturen abzielt. Vorsicht ist geboten, wenn die zwangsläufig mit einer Abschwächung des unteren Spektralbereichs verbundenen Unterschwinger der PSF zu Fehlinterpretationen des Bildinhalts führen können². Zu derartigen Artefakten kommt es nicht, wenn ein Hochpass- oder Bandpassfilter korrekt dimensioniert zur Restauration, d.h. zur Kompensation eines Tiefpassprozesses bei der Bildaufnahme eingesetzt wird (wenn die Gesamt-MTF der Kette aus Bildsensor und Restaurationsfilter linear ist oder Tiefpasscharakter hat, weist auch die PSF dieser Systemkette keine Unterschwinger auf).

1. Ein durch Defokussierung unscharf kopierter Positivabzug von einem gegebenen Negativbild wird mit letzterem zur Deckung gebracht. Eine Durchbelichtung ergibt das „gefilterte“ Positiv.
2. So wurden beispielsweise bei Röntgenaufnahmen die infolge einer Hochpassfilterung aufgehellten Ränder einer Fraktur, die sich in Röntgenaufnahmen als dunkler Streifen abzeichnet, irrtümlich als Entzündungsprozess diagnostiziert.

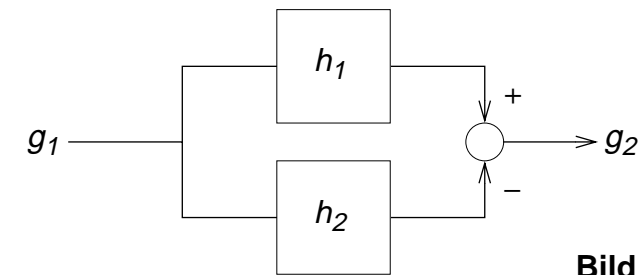


Bild 5—21

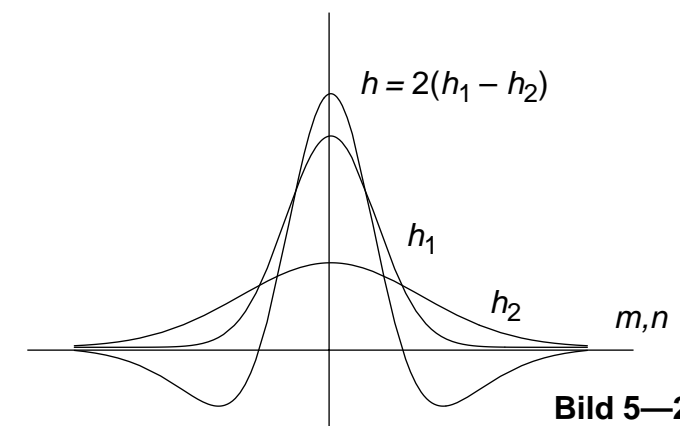
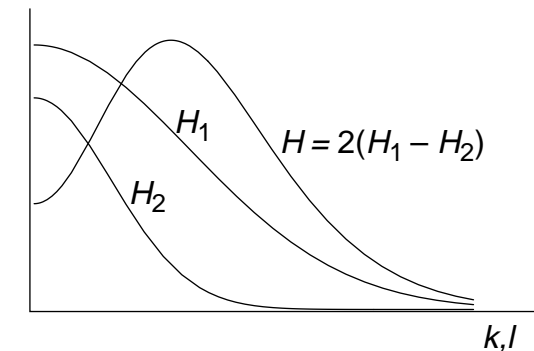


Bild 5—22

Als diskrete Implementierung der Gauß-Funktion bieten sich die *Binomial-Funktionen* an. In Tabelle 5-1 sind die Koeffizienten der Binomial-Funktionen bis zur Ordnung $i=8$ aufgestellt¹. c ist darin ein Normierungsfaktor (Summe aller Koeffizienten) und σ die Standardabweichung, also das Maß für die laterale Ausdehnung einer auf den Stützstellen der Binomialfunktion interpolierten kontinuierlichen Funktion, die mit zunehmender Ordnung die Gauß-Funktion immer genauer approximiert. Höhere Ordnungen der Binomial-Funktion lassen sich durch die Faltung niedriger Ordnungen entwickeln: $b_i * b_j = b_{(i+j)}$.

Die Binomial-Funktion 1. Ordnung ist die *rect-Funktion*, ihre transformierte also die *si-Funktion*, siehe Abschnitt 2.3.3 Seite 45. Die transformierten der Binomial-Funktionen — hier also die *Filter-OTF* — lassen sich demgemäß durch die mit der Ordnungszahl der Binomial-Funktion potenzierte *si-Funktion* darstellen, Bild 5-23. Sie weisen daher unabhängig von ihrer Ordnung eine erste Nullstelle bei der Grenzwellenzahl (= halbe Abtast-rate) auf. Die PTF ist durchgängig Null. Die Bandbreite der resultierenden Tiefpasscharakteristik ist reziprok proportional zur Standardabweichung σ (siehe Tabelle 5-1), d.h. sie nimmt mit der Wurzel ihrer Ordnung ab.

Zweidimensionale Faltungskerne können durch Faltung orthogonaler eindimensionaler Faltungskerne konstruiert werden. Als ein einfaches Beispiel wird in Gl. (5-6) ein zweidimensionaler Binomial-Tiefpass 2. Ordnung dargestellt². Umgekehrt kann bei ausgedehnten Faltungskernen der Rechenaufwand reduziert werden, indem das Bild nacheinander mit den entsprechenden eindimensionalen Kernen gefaltet wird. Hochpassfilter und

1. Tabelle 5-1 stellt das sogenannte „Pascalsche Dreieck“ dar, in dem die Koeffizienten der nächst höheren Ordnung einer Binomial-Funktion jeweils aus der Summe der links und rechts unmittelbar darüberliegenden Koeffizienten gebildet werden.
2. Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass Faltungskerne keine Matrizen sind und dass ihre Verknüpfung nicht mittels Matrixoperationen erfolgt! Zur den Vereinbarungen der Schreibweise von Vektoren und Matrizen siehe Fußnote 1 auf Seite 16.

Tabelle 5-1

i	c	Binomial-Koeffizienten	σ^2
0	1	1	0
1	1/2	1 1	1/4
2	1/4	1 2 1	1/2
3	1/8	1 3 3 1	3/4
4	1/16	1 4 6 4 1	1
5	1/32	1 5 10 10 5 1	5/4
6	1/64	1 6 15 20 15 6 1	3/2
7	1/128	1 7 21 35 35 21 7 1	7/4
8	1/256	1 8 28 56 70 56 28 8 1	2

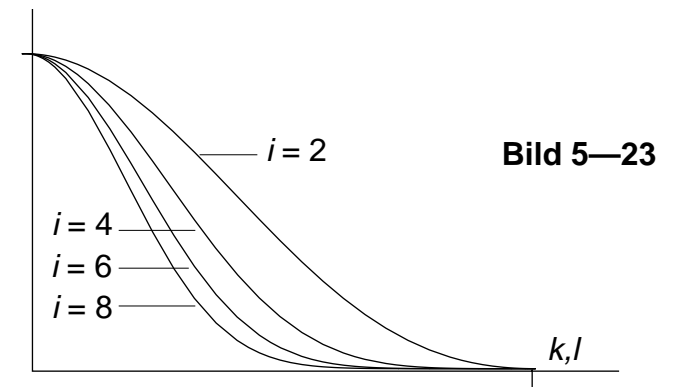


Bild 5-23

$$h_{TP} = h_{TPh} * h_{TPv} = \frac{1}{4} [1 \ 2 \ 1] * \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

Bandpassfilter können, wie oben angeführt wurde, durch Subtraktion von Tiefpassfiltern unterschiedlicher Bandbreite konstruiert werden. Im einfachsten Fall ergibt die Subtraktion eines zweidimensionalen Binomial-Filters von $H(k,l)=1$ — d.h. von einer PSF des Typs diskrete δ -Funktion — ein Hochpassfilter. In dem in Gl. (5-7) dargestellten Beispiel wurde der Binomial-Tiefpass 2. Ordnung nach Gl. (5-6) verwandt¹. Die MTF zeigt Bild 5-24.

Die Koeffizientensumme gibt die *Durchlasseigenschaft* für den Gleichanteil an, sie muss also größer oder gleich Null sein. Gl. (5-8) zeigt ein Bandpassfilter, das aus Binomial-Filtern 4. und 2. Ordnung so konstruiert wurde, dass Spektralkomponenten um $1/3 \cdot k_{\max}$ gegenüber $k,l=0$ etwa 2,5-fach verstärkt werden (hier ist noch die Erweiterung des ersten Terms mit dem Faktor 18 sowie die Vergrößerung des Faltungskerns auf jeweils 5 Spalten und Zeilen nötig)². Bild 5-25 zeigt die aus 2D-si'-Funktionen konstruierte MTF.

Wenn zweidimensionale Faltungskerne in dieser Weise additiv aus verschiedenen Binomial-Funktionen zusammengesetzt sind, können sie allerdings im allgemeinen nicht mehr wie oben angeführt in zwei eindimensionale Faltungskerne fraktioniert werden.

5.4.2 Zur Implementierung der diskreten Faltungsoperation

Rechentechnisch kann ein FIR-Filter, d.h. eine zweidimensionale Faltung als vier ineinander geschachtelte Schleifen implementiert werden (Bild 5-26): Die beiden inneren Schleifen errechnen ein Zielpixel aus der Produkt-Summe des Faltungsausdrucks, die beiden äußeren Schleifen lassen diese Operation pixelweise über den gesamten Zielbildbereich laufen.

1. Um zwei Faltungskerne zu addieren, müssen beide von derselben Dimension sein und denselben Gewichtungsfaktor besitzen. In diesem Fall ist der Identitätsoperator h_I durch Nullen zu erweitern und auf den Gewichtungsfaktor von h_{TP} zu bringen.
2. Wegen der Form ihrer PSF werden Filter dieses Typs „mexican hat“ genannt.

$$h_{HP} = h_I - h_{TP} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

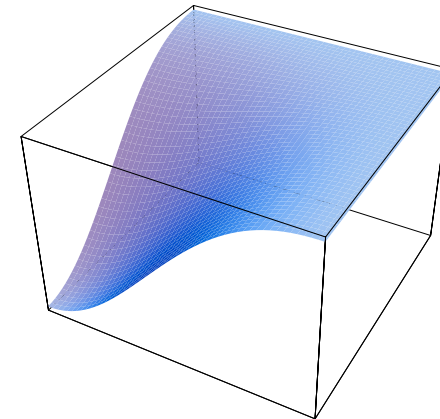


Bild 5-24

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{288} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & 12 & 2 & -4 \\ -6 & 12 & 36 & 12 & -6 \\ -4 & 2 & 12 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

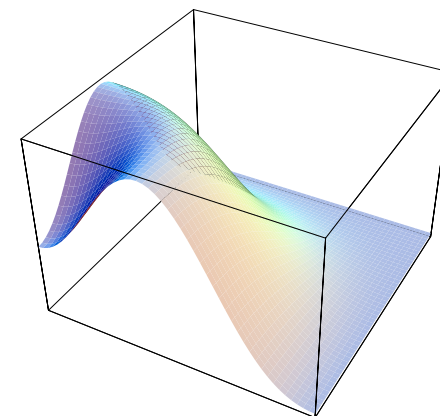


Bild 5-25

Zur Veranschaulichung der zweidimensionalen Faltung wird der Ablauf der Operation oft als zeilenweises und pixelweises Verschieben einer „Maske“ betrachtet (Bild 5—27). Die „Maske“ ist der um 180° gedrehte Faltungskern, die $h(m,n)$ -Matrix (die Drehung trägt der Subtraktion der Koordinaten in den Faltungssummen Rechnung). Ihre „Pixel“ sind die Koeffizienten dieser Matrix¹. Sie werden mit den jeweils deckungsgleichen Pixeln multipliziert, und die Summe aller Produkte wird in der der 0,0-Position der Matrix entsprechende Pixelposition des Zielbildes abgespeichert.

Deutlich wird bei dieser Betrachtungsweise das Randproblem. Wenn der Faltungskern eine Ausdehnung von i bzw. j Pixelabständen in jeweils positiver und negativer Koordinatenrichtung aufweist, können an den äußeren Bildrändern von jeweils i Spalten bzw. j Zeilen Zielpixel nicht errechnet werden. Um die Aussparung des Randes im Zielbild zu vermeiden, kann das Quellbild um einen entsprechenden Rand erweitert werden, der z.B. mit gespiegelten Randpixeln besetzt wird.

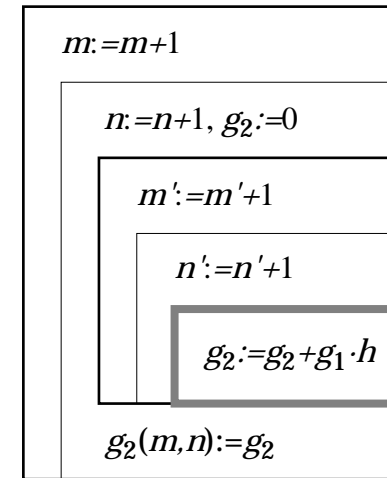


Bild 5—26

5.4.3 Rekursive Filter

Kontinuierliche Filter für Signale im Zeitbereich werden durch Netzwerke realisiert, die speichernde Komponenten (Kapazitäten, Induktivitäten, Laufzeitglieder) enthalten. Ihre Impulsantwort muss daher notwendigerweise *kausal* sein. Diskret lässt sich ihre Wirkungsweise durch eine Rückkopplung nachbilden, die eine Signalverzögerung beinhaltet: Das aktuelle Ausgangssignal wird aus dem Eingangssignal unter Verwendung der um ein oder mehrere Abtastintervalle zurückliegenden Ausgangssignale berechnet. Je nachdem, ob dieser Filtertyp aus Sicht der Verarbeitungsstruktur, des Rechenalgorithmus oder der Impulsantwort betrachtet wird, wird er als *rückgekoppeltes* Filter, als *rekursives* Filter oder als *IIR*-Filter bezeichnet.

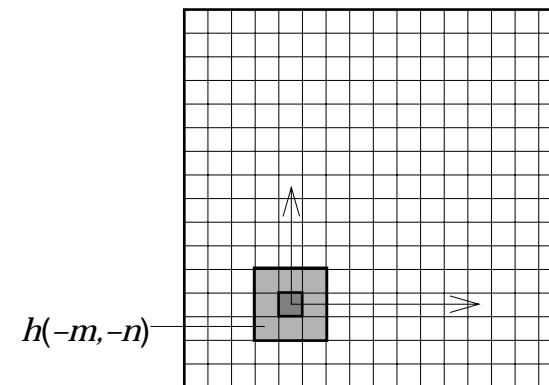


Bild 5—27

1. Zum Terminus „Maske“ siehe Fußnote 1. auf Seite 110

Der Terminus IIR steht für *infinite impulse response*: Aufgrund der Rekursivität ist die Impulsantwort dieses Filtertyps grundsätzlich positiv-unendlich ausgedehnt. Vorteilhaft ist gegenüber Filtern des FIR-Typs, dass lang abklingende Impulsantworten mit wenig Rechenaufwand realisiert werden können. Problematisch ist andererseits, dass rekursive Filter instabil sein können. Unbequem ist darüber hinaus, dass die Impulsantwort nicht wie bei IIR-Filtern explizit durch den Faltungskern gegeben ist. Der Entwurf muss daher iterativ als Approximationsverfahren durchgeführt werden und zudem einen Stabilitätstest beinhalten.

Für die Bildverarbeitung ist die Recheneffizienz sehr attraktiv, insbesondere wenn — wie es bei Restaurations- und Enhancement-Anwendungen häufig der Fall ist — eine ausgedehnte PSF realisiert werden soll. Jedoch ist die Kausalität der Impulsantwort (Bild 5—28) bei Bildern prohibitiv. Kausalität ist zwangsläufig mit einem nichtlinearen Phasengang verbunden. Nun haben wir im Gegensatz zum Zeitbereich im Bildbereich die Möglichkeit, die Laufrichtung zu invertieren. Wir können damit die konjugiert-komplexe Funktion zur (komplexen) OTF eines rekursiven Filters herstellen (deren PSF ist kausal in negativer Richtung) und erhalten durch Multiplikation beider miteinander eine reelle, d.h. eine nullphasige OTF, Gl. (5–9).

Rechentechnisch läuft dies auf eine Kaskadierung von Filteroperationen hinaus: Nacheinander wird das Bild mit demselben rekursiven Filter in den beiden entgegengesetzten Ortsrichtungen gefiltert. Dies gilt, wenn die Filteroperation lediglich auf die in *Laufrichtung* zurückliegenden und bereits gefilterten Pixel rekursiv zugreift. Sie produziert in diesem Fall auch nur eine eindimensionale, in Laufrichtung ausgerichtete PSF.

Die Betrachtung kann jedoch ohne weiteres ins Zweidimensionale erweitert werden: Wenn der Algorithmus zeilen- und spaltenweise fortschreitet — d.h. in den Quadranten (+m/+n) hineinläuft — und dabei auf bereits gefilterte Pixel innerhalb des in den beiden Laufrichtungen zurückliegenden Quadranten (-m/-n) zugreift, produziert er eine zweidimensionale kausale PSF in Laufrichtung (+m/+n), Bild 5—29.

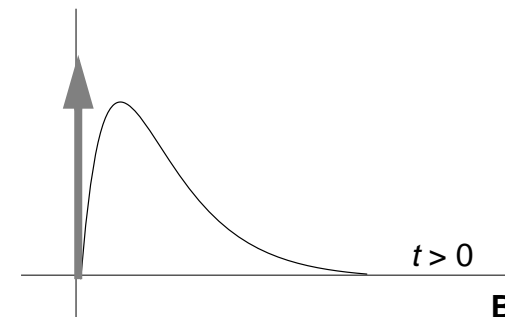


Bild 5—28

$$h_{-m} \quad \circ \text{---} \bullet \quad H_{-k} = H_k^*$$

$$H \cdot H^* = |H|^2 \quad (5-9)$$

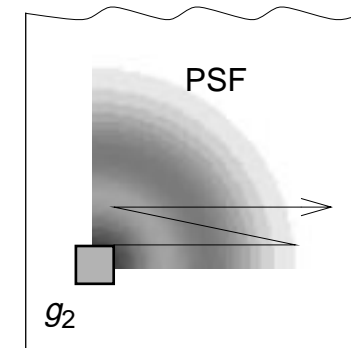


Bild 5—29

Um die Kausalität in beiden Dimension aufzuheben, müssen den Filterdurchläufen (+m/+n) und (-m/+n) konsequenterweise noch zwei weitere Filterdurchläufe in den orthogonalen Gegenrichtungen (+m/-n), (-m/-n) folgen, Bild 5—30. Als MTF des vierfach kaskadierten IIR-Filters ergibt sich damit die vierte Potenz der MTF des Basisfilters, Gl. (5-11).

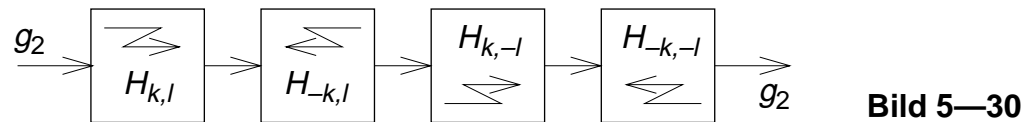


Bild 5—30

Ein weiterer Freiheitsgrad für den Entwurf der PSF eines IIR-Filters kann durch Kombination des Rückkopplungsmechanismus mit einem FIR-Filter erzielt werden, Bild 5—31. Die allgemeine Form eines IIR-Filters, Gl. (5-10), besitzt daher Faltungsterme sowohl in Vorwärts- wie in Rückwärtsrichtung. Wird Gl. (5-10) nach g_2 aufgelöst, ergibt sich ein Ausdruck, der Nullstellen im Nenner aufweisen kann — der Grund, warum IIR-Filter im Gegensatz zu FIR-Filtern instabil sein können.

Mit dem beschriebenen rekursiven Filteransatz konnten Optimalfilter für die Restauration hochauflösender Röntgenbilder entworfen werden, die mit 3·3-Faltungskernen jeweils für den rekursiven und den nichtrekursiven Term befriedigende Approximationsergebnisse lieferten. Gefordert war in diesem Fall eine PSF mit einer Ausdehnung von ca. 100·100 Pixeln. Der Entwurf wurde im Spektralbereich unter Verwendung evolutionärer Approximationsstrategien (genetische Algorithmen) durchgeführt¹. Im Vergleich zu einem gleichwertigen FIR-Filter mit größenordnungsmäßig 10.000 Multiplikations-Additions-Operationen pro Pixel waren für das zitierte IIR-Filter nur $(3^2 \cdot 2 - 1) \cdot 4 = 68$ Operationen pro Pixel erforderlich.

1. B. Peters: Ein System zur Restauration digitaler Röntgenbilder, Dissertation am Lehrstuhl für Messtechnik und Bildverarbeitung, Aachen 1999

$$g_2(m, n) = \sum_{m'=0}^i \sum_{n'=0}^j h_v(m', n') \cdot g_1(m - m', n - n') + \sum_{m'=0}^i \sum_{n'=0}^j h_r(m', n') \cdot g_2(m - m', n - n') \quad (5-10)$$

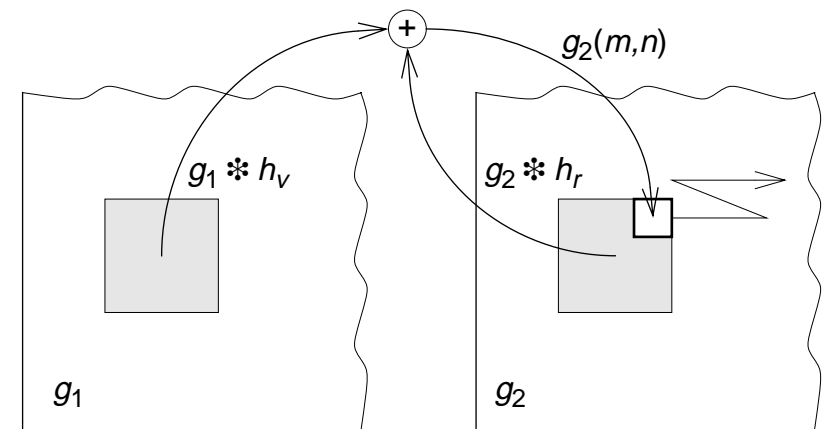


Bild 5—31

$$\mathbf{H}_{\text{ges}} = \mathbf{H}_{k,l} \cdot \mathbf{H}_{-k,l} \cdot \mathbf{H}_{k,-l} \cdot \mathbf{H}_{-k,-l} = |\mathbf{H}|^4 \quad (5-11)$$

5.4.4 Medianfilter

Der Konflikt, unkorrelierte lokale Fluktuationen, die die Detailerkennbarkeit beeinträchtigen (siehe Seite 25), mittels eines Tiefpassfilters „glätten“ zu wollen, gleichzeitig jedoch Kanten- und Linienstrukturen nicht zu verwischen, hat zu einer Vielfalt speziell konzipierter Filter geführt. Eine interessante Lösung ist das Medianfilter.

Das Medianfilter ist ein *Rangordnungsfilter*, bei dem aufgrund lokaler Nachbarschaftsbeziehungen entschieden wird, ob ein Pixel in seinem Grauwert erhalten oder auf den Grauwert seiner Nachbarn nivelliert werden soll. Das Medianfilter zählt somit zu den lokalen Operationen.

Die zugrunde liegende Modellvorstellung ist die folgende: Störungen sind vorzugsweise punktuelle Ereignisse, d.h. kontrastmäßig aus ihrer lokalen Umgebung herausfallende Pixel. Strukturformation, d.h. Kanten und Linien sind dagegen durch eine richtungsabhängige Korrelation zwischen benachbarten Pixeln gekennzeichnet.¹ Mit anderen Worten: Gehört ein kontrastmäßig von seinem Nachbarn abweichendes Pixel zu einer Kante oder zu einer mindestens zwei Pixel breiten Linie, dann setzt sich sein Grauwertniveau lateral fort und es ist Ähnlichkeit zur Mehrzahl seiner Nachbarpixel gegeben: In diesem Fall muss sein Grauwert erhalten bleiben. Ist dagegen Ähnlichkeit nur zu wenigen Nachbarpixeln gegeben, wird seine Abweichung als Störung klassifiziert: Das Pixel wird in diesem Fall an das in seiner Nachbarschaft vorherrschende Niveau angeglichen.

Diese Strategie wird sehr einfach umgesetzt, indem die Grauwerte einer lokalen Umgebung (z.B. einer 3-3-Umgebung um das betrachtete Pixel herum) zu einer Liste aufsteigender Grauwerte geordnet werden. Dem betrachteten zentralen Pixel wird anschließend die mittlere Listenposition, der *Median* dieser Liste zugeordnet. In Bild 5—32 (mitte) ist der Effekt

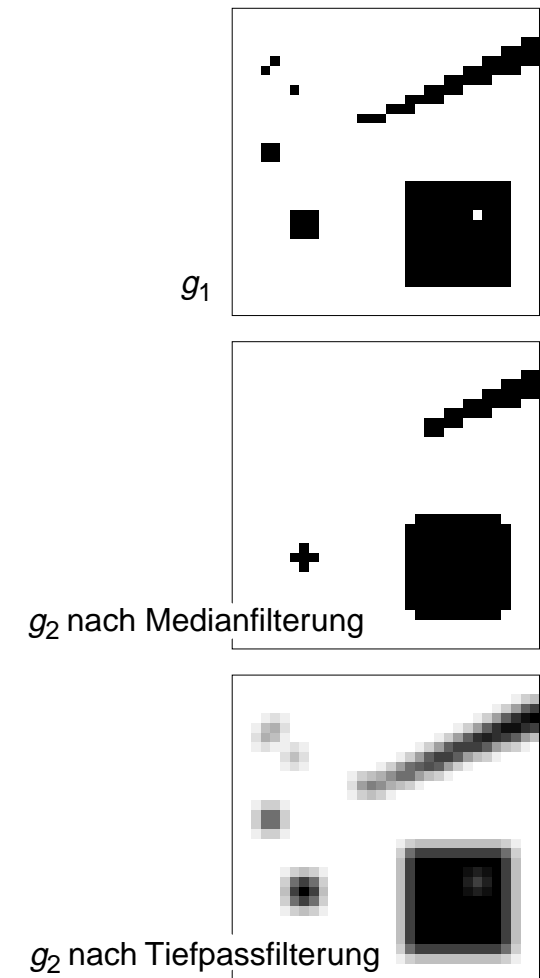


Bild 5—32

1. Zu den Begriffen 'Kante' und 'Linie' siehe Abschnitt 6.2.2 Seite 158.

eines 3·3-Medianfilters dargestellt: Es eliminiert isolierte helle oder dunkle Details bis zu einer Ausdehnung von 2·2 Pixeln. Gestreckte Kanten und Linien einer Breite von mindestens zwei Pixeln werden nicht verändert. Dünnere Linien sowie scharfe Ecken werden jedoch erodiert. Zum Vergleich wurde das Quellbild Tiefpass-gefiltert (Bild 5—32 unten). Bild 5—33 (unten) zeigt die Wirkung eines 3·3-Medianfilters auf ein Grauwertmuster (oben) mit überlagertem gaußschen Rauschen (mitte). Durch Erweiterung des Operators kann die Ausdehnung der eliminierten Ereignisse vergrößert werden.

5.4.5 Optimalfilter

Unter dem Begriff *Optimalfilter* wird eine Strategie für den Entwurf von Restaurationsfiltern verstanden: Erreicht werden soll der „optimale“ Kompromiss zwischen den konkurrierenden Forderungen, Kanten- und Linienstrukturen mit bestmöglichem Kontrast wiederzugeben und gleichzeitig den detailverdeckenden Effekt stochastischer Störungen zu mildern. In Konflikt geraten diese Forderungen, da zur Kompensation der Abbildungsunschärfe eine Hochpasscharakteristik erforderlich ist, zur Reduktion von Rauschsignalanteilen jedoch gerade eine Tiefpasswirkung gewünscht wird. Im realen Abbildungssystem sind grundsätzlich beide Beeinträchtigungen der Abbildungsgüte wirksam. Eine vermittelnde Strategie für eine Restauration muss daher lauten:

- „Wie kann aus einem gegebenen Bildsignal unter Verwendung des verfügbaren a-priori-Wissens über das Abbildungssystem, über die Abbildungssituation sowie Annahmen über idealtypische Eigenschaften von Objekt oder Szene ein Bild gewonnen werden, das eine bestmögliche Annäherung an eine ideale Abbildung des Objekts ergibt?“

Ein klassischer signaltheoretischer Ansatz hierfür wurde von *Norbert Wiener* postuliert, das *Wiener-Filter*. Als Ausgangspunkt stellt er die plausible Forderung nach *Minimierung der Erwartung des quadratischen Fehlers* zwischen restauriertem Bild g_3 und Objekt g_1 , Gl. (5-12), auf. Er formuliert

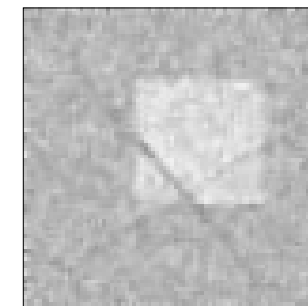
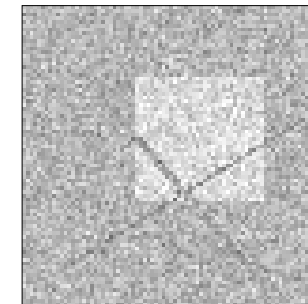
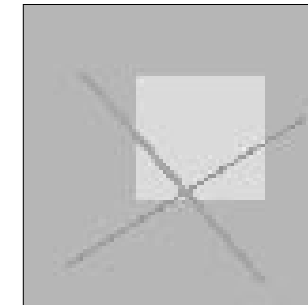


Bild 5—33

den den darauf gestützten Filteransatz im Spektralbereich, Gl. (5–16) auf Seite 124. Der Ansatz soll im folgenden heuristisch hergeleitet werden.

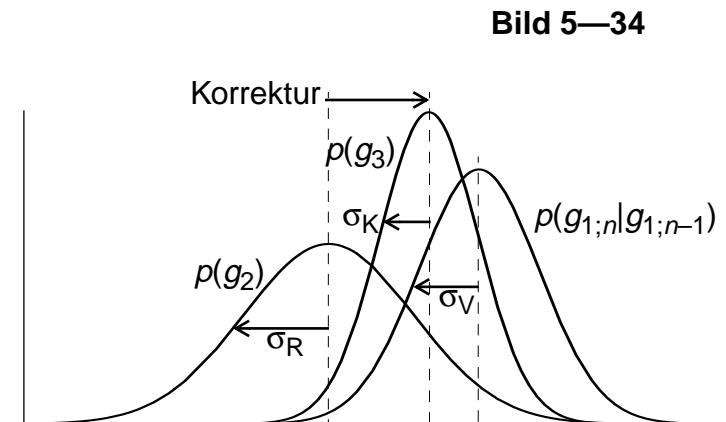
Der Abbildungsprozess liefert zunächst für jedes Pixel einen Amplitudenwert g_2 . Dieser setzt sich additiv zusammen aus einem Nutzsignalanteil g_1 , der in einer reproduzierbaren Beziehung zur abgebildeten Objekteigenschaft an diesem Ort steht, und einem Störungsanteil (Quantenrauschen, thermisches Rauschen etc., siehe Abschnitt 1.2 Seite 21), von dem lediglich die Kenngrößen $E(g_1)=g_2$ und σ_R seiner Verteilung $p(g_2)$ bekannt sind.

Betrachten wir ein isoliertes Pixel n , so gibt uns seine gemessene Amplitude $g_2(n)$ die *Erwartung* des real an diesem Ort vorliegenden Grauwertes, d.h. den mit größter Wahrscheinlichkeit vorliegenden Grauwert an. Bei angenommener Normalverteilung gibt die *Varianz* des überlagerten Störprozesses σ_R^2 , d.h. die Erwartung des quadratischen Messfehlers, lediglich Auskunft über die Unsicherheit des Messprozesses. Sie gibt aber keinen Hinweis auf eine mögliche Korrektur (siehe Seite 23).

Nun sind benachbarte Pixel im allgemeinen *korreliert*, denn ohne eine linien- oder flächenhafte Strukturierung einer Abbildung, die sich in abgrenzbaren, näherungsweise homogenen Arealen (‘Segmenten’) des Bildes ausprägt, würden Objekte oder Szenen nicht interpretiert werden können. Ein Maß für die erwartete Ähnlichkeit im Grauwert zwischen benachbarten Pixeln ist die *Verbundwahrscheinlichkeit* $p(g_{1;n} | g_{1;n-1})$. Ausgehend von der Kenntnis eines ungestörten Pixels $n-1$ kann daher der Wert seines Nachbarpixels n „geschätzt“ werden. Die Unsicherheit dieser Schätzung, d.h. die Erwartung des quadratischen *Schätzfehlers* wird in diesem Fall durch die *Varianz der Verbundwahrscheinlichkeit* σ_V^2 angegeben, die für Objekte der Klasse des abgebildeten Objekts a-priori gegeben sei.

Es liegt nun nahe, beide Informationen — den lokalen fehlerbehafteten Messwert und den auf seine Nachbarpixel gestützten Schätzwert — zu verknüpfen und damit die Erwartung des quadratischen Fehlers zu minimieren, Bild 5—34: Je kleiner die Varianz, d.h. je „vertrauenswürdiger“ die jeweilige

$$E\{(g_3 - g_1)^2\} = \min \quad (5-12)$$



$g_2(n)$: neuer Messwert, Pixel n

$g_3(n)$: korrigierter Messwert, Pixel n

$g_1(n-1)$: bekannter Wert des Nachbarpixels $n-1$

Information, desto stärker nimmt sie Einfluss auf das korrigierte Ergebnis. Die Abweichung des aktuellen Messwerts eines Pixels wird also eher als Störung gewertet, wenn ein starker Rauschprozess vorliegt und/oder die abgebildeten Objekte überwiegend homogene Bereiche aufweisen — anderenfalls wird sie eher als tatsächlich vorliegende lokale Fluktuation der Objektfunktion gewertet.

Gewichte für die Vertrauenswürdigkeit der beiden Komponenten sind die Kehrwerte ihrer jeweiligen Varianz. Ein Korrekturfaktor k , der zu einer entsprechend gewichteten Mittelwertbildung führt, kann nach Gl. (5-13) formuliert werden. Aus dem Produkt von Messfehlerverteilung $p(g_2)$ und Verbundwahrscheinlichkeit $p(g_{1;n}|g_{1;n-1})$, die voneinander statistisch unabhängig sind, kann die Varianz σ_K^2 der Amplitude des korrigierten Grauwertes $g_3(n)$, d.h. die Erwartung des mittleren quadratischen Fehlers der resultierenden Aussage, Gl. (5-14), hergeleitet werden. Diese wird, wie in Gl. (5-12) gefordert, mit der angegebenen Strategie minimiert.

Nun wurde hier vorausgesetzt, dass für die Ermittlung des geschätzten Signalanteils bereits ein korrigiertes Pixel als Startwert vorliegt. Allenfalls könnte der Restaurationsprozess nun rekursiv fortgesetzt werden. Er würde somit kausal werden, was der für die Behandlung von Bildern aufgestellten Forderung nach Akausalität der Filteroperationen widerspräche. Auch würde diese Vorgehensweise nicht zulassen, dass die Verbundwahrscheinlichkeit zu *allen* Nachbarpixeln für die Fehlerminimierung genutzt wird, denn zu diesem Zweck müsste der Korrekturmechanismus auf bereits korrigierte Pixel im gesamten Umfeld des zu korrigierenden Pixels zugreifen können, d.h. die lokale Umgebung des behandelten Ausgangspixels müsste mit einer örtlichen Gewichtung $[k]$ gefaltet und vom Eingangspixel subtrahiert werden, Bild 5—35. Eine so definierte Rekursivität verletzt die Kausalität!

Die Widersprüchlichkeit einer Korrektur, die sich auf das vollständige Pixelumfeld stützt, lässt sich elegant umgehen, wenn wir die beschriebene Strategie in den Spektralbereich transformieren. Der rekursive Ansatz im

$$k = \frac{\sigma_R^2}{\sigma_V^2} \tag{5-13}$$

$$g_3(n) = g_2(n) - \frac{k}{1+k} \cdot [g_2(n) - g_1(n-1)]$$

$$p(g_3) = p(g_2) \cdot p(g_{1;n}|g_{1;n-1})$$

$$\sigma_K = \sqrt{E\{(g_3 - g_1)^2\}} = \frac{\sigma_R \cdot \sigma_V}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_V^2}} \leq \text{Min}\{\sigma_R, \sigma_V\} \tag{5-14}$$

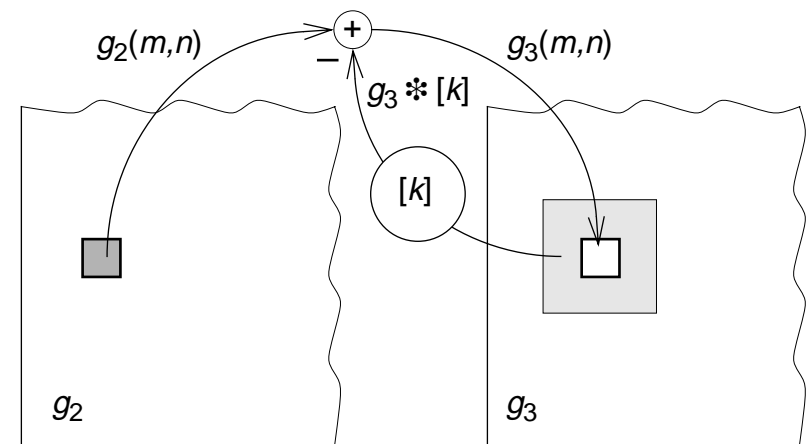


Bild 5—35

Ortsbereich wird im Spektralbereich durch einem Rückkopplungskreis abgebildet (innerer Kasten in Bild 5–36). Aus dem oben entwickelten Faltungskern $[k]$ wird ein Korrekturfaktor K im Gegenkopplungsweig.

Die Umsetzung dieser Rückkopplungsstruktur führt zur Gl. (5–15). Das Störsignal und die Korrelation zwischen benachbarten Pixeln einer idealtypischen Objektfunktion g_1 werden durch die zweidimensionalen Autokorrelationsfunktionen (AKF) $\phi(g_1)$ beschrieben. Die AKF wird im Spektralbereich durch das Leistungsdichtespektrum N bzw. $\phi(g_1)$ abgebildet. Komplementär zum Korrekturfaktor k im Ortsbereich stellt der Quotient aus dem Rauschspektrum N und dem Leistungsdichte-Spektrum $\phi(g_1)$ der Objektfunktion im Spektralbereich einen Rückkopplungsweig mit einer wellenzahlabhängigen Übertragungsfunktion K dar. Diese Gegenkopplung bewirkt eine wellenzahlabhängige Dämpfung nach Maßgabe der Wahrscheinlichkeit, ob eine Welle eher der Objektfunktion oder dem Rauschprozess zuzuordnen ist.

Die klassische Formel für das Wiener-Filter entsteht daraus, wenn noch die (reelle) Übertragungsfunktion H des Abbildungssystems in das Leistungsspektrum der Objektfunktion eingerechnet wird und ein Reziprokterm $1/H$ zur Kompensation der Übertragungsfunktion H (inverses Filter, siehe Seite 111) hinzugefügt wird. Die Diskussion dieser Formel zeigt, dass das Wiener-Filter in Spektralbereichen mit geringer relativer Rauschleistung zum inversen Filter, in Spektralbereichen mit hoher relativer Rauschleistung zum (glättend wirkenden) „matched filter“ tendiert. Da im allgemeinen das Verhältnis von Signalleistung zu Rauschleistung zu höheren Wellenzahlen hin abnimmt, haben Restaurationsfilter nach dem Wiener-Ansatz häufig eine Bandpass-Charakteristik, wie sie beispielhaft in Bild 5–18 auf Seite 112 illustriert ist.

Wenn einmal die MTF eines Wiener-Filters für ein gegebenes System bestimmt worden ist, kann auch dieser Filter selbstverständlich als FIR- oder IIR-Filter im Ortsbereich implementiert werden. Der Schritt in den Transformationsbereich war lediglich hilfreich für die Herleitung, und er ist natürlich für den Entwurf der Filtercharakteristik nötig.

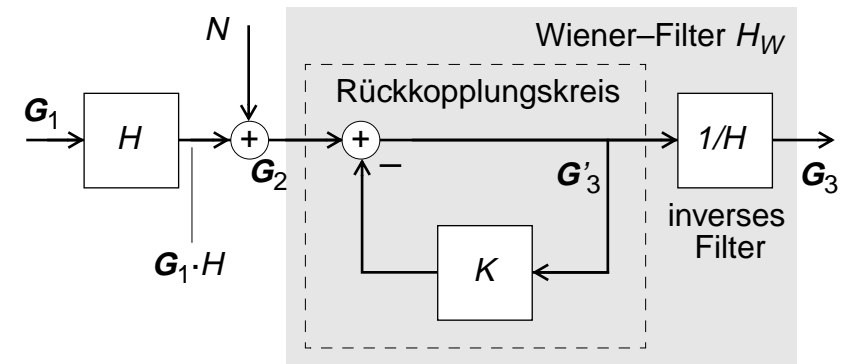


Bild 5–36

$$G_3 = G_2 - K \cdot G_3$$

$$G_3 = G_2 \cdot \frac{1}{1 + K} \quad (5-15)$$

$$K = \frac{N}{\phi(g_1)}$$

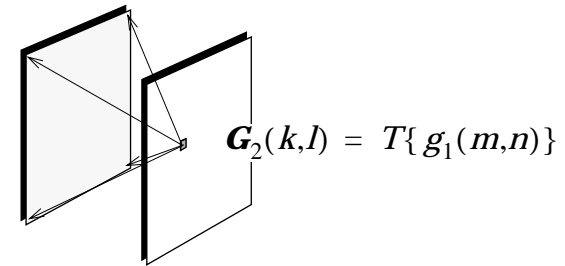
$$\phi(g_1) = G_1 \cdot G_1^*$$

$$K = \frac{N}{\phi(g_1) \cdot H^2}$$

$$H_W = \frac{G_3}{G_2} = \frac{1}{H} \cdot \frac{\phi(g_1) \cdot H^2}{N + \phi(g_1) H^2} \quad (5-16)$$

5.5 Globale Operationen

Unter globalen Operationen verstehen wir Operationen, bei denen für die Berechnung jedes Elementes der Zielmatrix jeweils die Gesamtheit *aller* Elemente der Quellmatrix heranzuziehen ist. Typische Vertreter dieser Klasse sind die Orthogonaltransformationen. Für die Bildverarbeitung ist wiederum die diskrete Fouriertransformation (DFT, siehe Abschnitt 2.2 Seite 36) besonders wichtig.



5.5.1 Die DFT

Eine wesentliche Motivation für die Einführung der DFT war ihr Nutzen für Modellbetrachtungen, wie die Herleitung der CT-Rekonstruktion oder des Wiener-Filters bewiesen haben. Praktische Anwendung findet die DFT bei der Bild- und Systemanalyse sowie beim Filterentwurf. Als Bildoperation selbst können DFT und inverse DFT dienen, indem eine gewünschte Filterwirkung unmittelbar im Spektralbereich ausgeführt wird: Nach der Transformation des zu filternden Bildes wird das Spektrum dieses Bildes mit der zweidimensionalen MTF multipliziert (ein nullphasiges Filter vorausgesetzt) und das neu gewichtete Spektrum in den Bildbereich zurücktransformiert.

Spätestens bei der zuletzt genannten Anwendung wird die Frage nach dem Rechenaufwand für die DFT relevant. Die Runge-Gleichungen, Gln. (2-14) und (2-13) auf Seite 40, die der DFT und inversen DFT zugrunde liegen, sagen aus, dass für die Transformation einer diskreten Funktion aus m Elementen m^2 komplexe Multiplikations/Additions-Schritte nötig sind. Die Transformation einer zweidimensionalen Funktion aus $m \cdot n$ Elementen erfordert entsprechend $m^2 \cdot n^2$ Schritte, denn zu jedem der $m \cdot n$ Elemente der Transformierten tragen alle $m \cdot n$ Element der Quellfunktion bei.

In Abschnitt 2.3.1 Seite 43 wurde aber bereits dargelegt, dass die 2D-DFT in zwei Schritte zerlegt werden kann: In einem ersten Schritt wurden alle n

$$\mathbf{G}_1(k) = \sum_m g_1(m) \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} \quad (2-14)$$

$$g_1(m) = \frac{1}{M} \sum_k \mathbf{G}_1(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot m}{M}} \quad (2-13)$$

Zeilen eindimensional transformiert. Dieser Schritt kostet $n \cdot m^2$ Rechenschritte und liefert eine Matrix aus Koeffizientenzeilen mit jeweils $m/2$ komplexen Werten, also wiederum m Elementen. Im anschließenden zweiten Schritt werden die m Spalten der Koeffizientenmatrix wiederum eindimensional transformiert. Dieser Schritt kostet $m \cdot n^2$ Rechenschritte. Der Gesamtaufwand kann also auf $(m \cdot n) \cdot (m+n)$ Rechenschritte reduziert werden.

Dieses Prinzip der Fraktionierung wird bei der „Fast Fourier Transform“, der FFT mit Hilfe des *Cooley-Tukey*-Algorithmus weiter ausgebaut, indem die Zeilen bzw. Koeffizientenspalten weiter zerlegt und ineinandergeschachtelt werden. Vorausgesetzt werden muss dafür, dass m und n jeweils Potenzen von 2 sind. Statt m^2 Rechenschritten¹ für eine Zeile aus $m = 2^{\text{ld}(m)}$ Elementen sind nun nur noch $(m/2) \cdot \text{ld}(m)$ Rechenschritte notwendig, für eine zweidimensionale Funktion aus $m \cdot n$ Elemente entsprechend $(m \cdot n/2) \cdot \text{ld}(m \cdot n)$ — das sind bei einem 1024^2 -Bild „nur noch“ rund 10 Millionen Rechenschritte!

Die Verzahnung der Rechenschritte erfordert eine Umordnung der Elemente nach dem sogenannten „perfect-shuffle“-Prinzip. Das Rechenschema selbst wird als „butterfly“-Algorithmus bezeichnet.

5.5.2 Filterimplementierung im Spektralbereich vs. Ortsbereich

Theoretisch sind beide Filterimplementierungen gleichwertig. Praktisch ergeben sich jedoch unterschiedliche Restriktionen.

- *Pro Spektralbereichs-Implementierung*
Die OTF bzw. MTF kann einen beliebigen Verlauf haben; es braucht keine Rücksicht darauf genommen zu werden, ob deren Transformierte zu einem Faltungskern akzeptabler Ausdehnung führt. Ebenso entfällt das Problem der Approximation, wenn eine ausgreifende PSF durch

1. Ein „Rechenschritt“ setzt sich bei der FFT aus einer komplexen Multiplikation und zwei Additionen zusammen.

einen finiten Faltungskern möglichst geringer Ausdehnung implementiert werden soll. Bei Filtercharakteristiken, die andernfalls sehr ausgedehnte Faltungskerne verlangen, können sich Vorteile bezüglich des Rechenaufwandes ergeben.

- *Pro Ortsbereich-Implementierung*
Numerischer Probleme, die mit den komplexen Operationen der DFT verknüpft sind, werden umgangen. Im allgemeinen lassen sich die gewünschten Filtercharakteristiken durch Faltungskerne approximieren, die vom Rechenaufwand her deutlich günstiger als die Filter-Implementierung im Spektralbereich sind. In diesem Sinne kann auch die Zerlegung und Separierung des Faltungskerns weitere Rechenvorteile bringen, ebenso die Wahl eines rekursiven Ortsbereichsfilters (Abschnitt 5.4.3 Seite 117). Darüberhinaus können durch algorithmische oder numerische Eigenarten der Implementierung verursachte Artefakte einfacher auf ihre Ursachen zurückgeführt werden.

Die Abwägung der Vor- und Nachteile erklärt, warum Filter für die Bildrestauration und das Enhancement üblicherweise im Ortsbereich implementiert werden. Für die Analyse von Bildinhalten und Systemeigenschaften, für den Entwurf von Systemen sowie zur Erzielung spezieller Übertragungsfunktionen ist die DFT jedoch auch als Bildoperation unverzichtbar.

5.5.3 Die diskrete Cosinus-Transformation (DCT)

Die DCT zerlegt eine Signal- oder Bildfunktion in ausschließlich reelle Komponenten, d.h. in Cosinusfunktionen. Dies setzt voraus, dass die zu transformierende Funktion *symmetrisch* ist. Symmetrie kann bei einer beliebigen finiten Funktion durch eine Erweiterung mit ihrer *gespiegelten* Funktion erzielt werden: Statt einer periodischen Fortsetzung (Bild 2—5 auf Seite 41) wird die Kombination der zu transformierenden Funktion und ihrer Spiegel-funktion periodisch *alternierend* fortgesetzt, Bild 5—37.

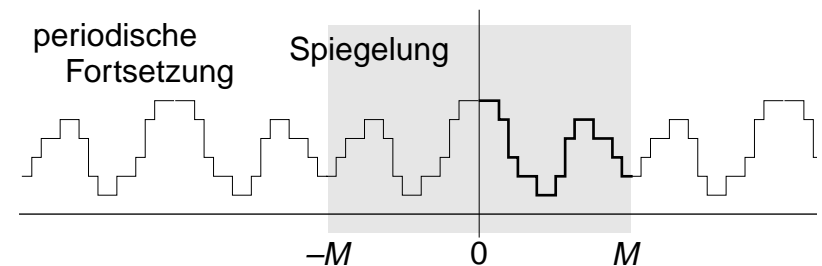


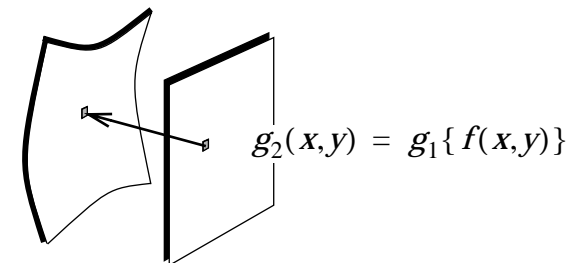
Bild 5—37

Die Periode der Grundwellen ist nunmehr durch die zweifache Länge der finiten Funktion gegeben, also $2M \cdot \Delta x$. Das spektrale Abtastinkrement wird folglich $1/(2M \cdot \Delta x)$. Weiterhin ist die Wellenzahl der kürzesten Welle $1/2\Delta x$. Wie bei der DFT sind M harmonische Wellen für eine vollständige Transformation erforderlich, jedoch ausschließlich Cosinusfunktionen (da eine reelle Funktion ein symmetrisches Spektrum hat, sind wiederum keine negativen Spektralkoeffizienten zu berechnen).

Die DCT findet vorwiegend Anwendung in Verfahren zur *Kompression* von Bilddatensätzen¹.

5.6 Geometrische Operationen

Unter geometrischen Operationen sollen hier solche Operationen verstanden werden, die den (zweidimensionalen) Funktionsverlauf der Bildfunktion nicht beeinflussen sondern diese lediglich auf einen Zielbildraum abbilden, dessen Geometrie eine lineare oder nichtlineare, jedoch in jedem Fall stetige, Funktion des Quellbildraumes ist. Die Abbildung kann als ein Kopiervorgang auf eine beliebige streck- und schrumpfbare, eben aufgespannte Membran verstanden werden („rubber stretching“). Genauso kann sie auch als Kopiervorgang der invers gestreckten bzw. geschrumpften Quellbildebene auf die neue Zielbildebene gesehen werden (diese Version wird hier bevorzugt, siehe Seite 103).



-
1. Die Methoden und Verfahren, die in einem Bild enthaltene Information mit einer möglichst weitgehend reduzierten Datenmenge fehlerfrei oder mit Fehlern, die die Interpretation nicht beeinträchtigen, zu übertragen oder zu speichern, werden im Teil B, Abschnitt 9 "Bilddaten-Kompression", Seite 211 ff behandelt.

Geometrische Operationen, auch als geometrische Verzerrungen oder Entzerrungen bezeichnet, dienen u.a. dazu,

- Verzeichnungen des Bildaufnahmeprinzips (Tonnen- oder Kissenverzeichnungen einer Linsenoptik, Projektion auf den gewölbten Eingangsschirm eines elektrooptischen Röntgenbildverstärkers etc.) zu kompensieren,
- ein Objekt, das zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder mit unterschiedlichen Bildaufnahmesystemen abgebildet wurde, in seinen Bildern zur Deckung zu bringen („image registration“),
- Verzeichnungen infolge einer ungünstigen Aufnahmegeometrie (z.B. stürzende Linien) zu korrigieren oder
- willkürliche Verzeichnungen („special effects“) zu produzieren.

Geometrische Operationen werden durch die Gesetzmäßigkeit beschrieben, mit der die Koordinaten eines Punktes im Zielbild den Bildkoordinaten des Quellbildes zugeordnet werden. Diese Beziehung muss in einer Form angegeben sein, aus der für jeden beliebigen Punkt ein Verschiebungsvektor \vec{x}_v , Gl. (5-17), bestimmt werden kann:

$$\vec{x}_v = \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \end{Bmatrix} = f(x, y) \quad (5-17)$$

1. Für den einfachen Fall einer affinen Abbildung können Translation, Scherung und Rotation sowie Skalierung unter Verwendung homogener Koordinaten in den neun Koeffizienten einer auf zwei Dimensionen reduzierten Abbildungsmatrix zusammengefasst werden, Abschnitt 1.1.1 Seite 16.
2. Einfache nichtlineare Verzeichnungen (wie etwa eine durch Projektion auf eine Kugeloberfläche erzeugte Kissenverzeichnung) können ggf. explizit beschrieben oder durch Polynome angenähert werden.
3. Kompliziertere Verzerrungsverläufe bedürfen der Aufstellung eines dem Zielbild zuzuordnenden Verschiebungsvektorfeldes („distortion map“), aus dem je nach Dichte der Stützpunkte die benötigten Werte durch Interpolation zu ermitteln sind.

Die Umsetzung einer geometrischen Operation wäre nun ein trivialer Schritt, wenn das Quellbild als kontinuierliche Funktion vorläge. Bei einer diskreten Quellbildfunktion können dagegen die Abtastpunkte des Zielbildes an beliebigen Orten zwischen den Abtastpunkten des Quellbildes liegen. Korrekt wäre nun, aus den diskreten Stützstellen (das Abtasttheorem sei bei der Diskretisierung erfüllt!) den kontinuierlichen Funktionsverlauf zu rekonstruieren und an den Stützstellen des Zielbildrasters erneut abzutasten. Die diskrete Funktion ist zu diesem Zweck mit dem Rekonstruktionsfilter, der si -Funktion zu falten, siehe Gl. (2–33) auf Seite 53. Die Faltungssumme ist diskret jeweils an den Abtastpunkten des diskreten Bildraumes des Zielbildes zu berechnen, Bild 5–38.

Als infinite Funktion fordert die si -Funktion den Abbruch. Je nach der Zahl der Stützstellen, aus denen der Zwischenwert berechnet wird, müssen Fehler toleriert werden. Wenn andererseits ohnehin ein Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Fehlerminimierung erforderlich ist, können sinnvollerweise auch andere, weniger aufwendige Interpolationsverfahren in Betracht gezogen werden. So stellt eine einfache *bi-lineare Interpolation* bereits befriedigend genaue Zwischenwerte dar. Eine Abschätzung der Auswirkungen des Interpolationsfehlers kann im Spektralbereich durchgeführt werden: Der bilinearen Interpolation entspricht die Faltung der diskreten Bildfunktion mit einer zweidimensionalen Dreiecksfunktion, im Spektralbereich also die Multiplikation mit einer si^2 -Funktion, Bild 5–39.

Es darf jedoch nicht übersehen werden, dass bei einer erneuten Abtastung der auf diese Weise interpolierten Signalfunktion alle außerhalb des Basisbandes $\pm 1/2\Delta x$ liegenden Spektralanteile in das Basisband hineingefaltet werden und Artefakte (insbesondere mangelnde Glattheit an Kanten) erzeugen. Diese wirken sich besonders problematisch bei stärkeren Vergrößerungen der Objekte bzw. bei Skalierungen auf reduzierte Bildformate aus. Werden höhere Ansprüche an die Qualität des Zielbildes gestellt, dann müssen bessere Approximationen an die ideale Interpolation gefunden werden.

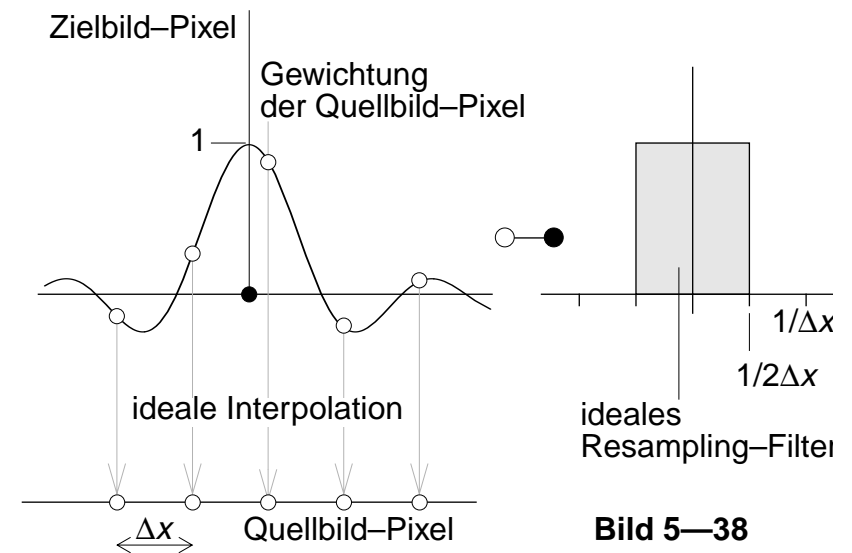


Bild 5–38

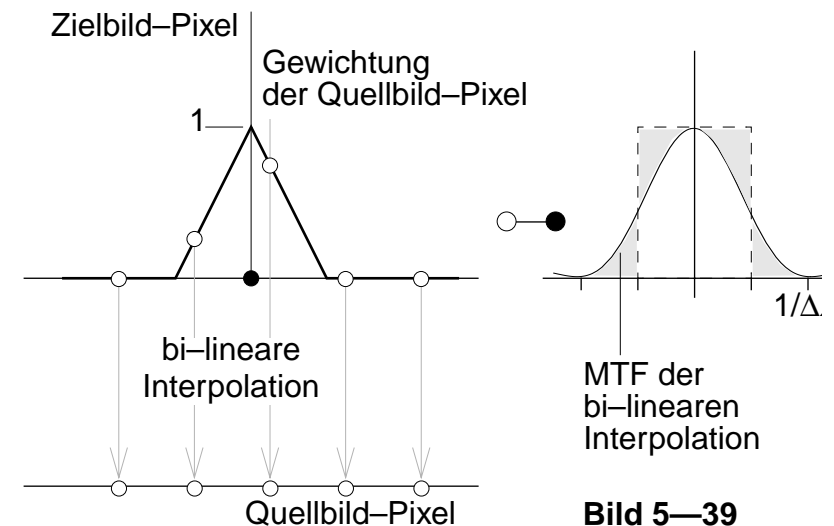
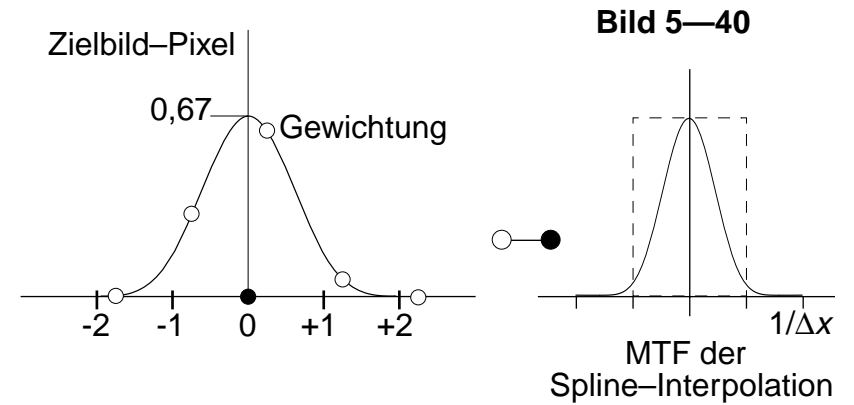


Bild 5–39

Durch Fortsetzen der Faltung der rect-Funktion mit sich selbst entstehen Interpolationsfunktionen mit zunehmender Kontinuität und Glattheit an den Abtastpunkten. Eine viermalige Faltung der rect-Funktion mit sich selbst ergibt ein Polynom 3. Ordnung. Diese Funktion wird als *kubischer B-Spline*¹ bezeichnet, Bild 5—40. Sie ist stückweise definiert durch Gl. (5—18). Der kubische B-Spline ist für die Interpolation von Bilddaten besonders geeignet, weil er (1.) kontinuierlich bis zur zweiten Ableitung, (2.) glatt an den Stützstellen und (3.) örtlich auf nur vier Stützstellen pro Koordinatenrichtung begrenzt ist. Seine MTF ist bereits weitgehend einer Gauß-Funktion angenähert.

In Bild 5—41 wurde das dunkle Quadrat um ein halbes Pixel diagonal verschoben und bi-linear, bi-kubisch mit einer B-Spline-Gewichtung sowie bi-kubisch mit einer Gewichtungsfunktion, deren MTF einen rect-Tiefpass auf Kosten eines Überschwingens besser approximiert², interpoliert (von links nach rechts).



$$h_{\text{spline}}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{2}|x|^3 - (x)^2 & 0 \leq |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases} \quad (5-18)$$

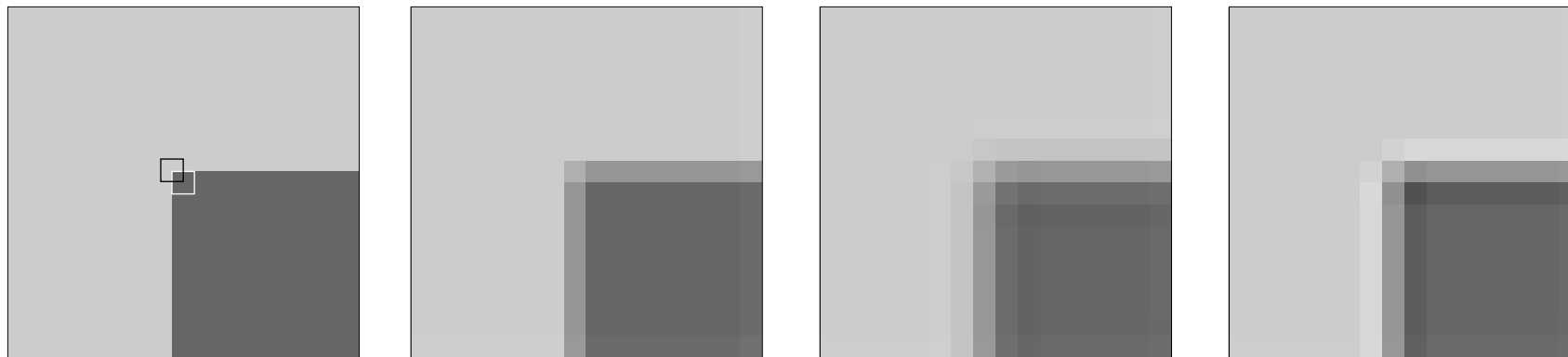


Bild 5—41

1. Spline (engl.): Straklatte, eine Latte, die im Bootsbau benutzt wird, um Rumpfpunkten mit optimaler Biegung an das Skelett der Spanten anzupassen.
2. Implementiert in Adobe Photoshop[®] 5.5

Stichworte

A

Abbildung 55
Abbildungen
 –modell, geometrisches 16
 –prozess 11
Absorptionskoeffizient 82
Abstand 198, 201
Abtast
 –rate 52
 –theorem 52
Ähnlichkeitssatz 51
akustische Linse 74
Artefakt 49
Autokorrelationsfunktion (AKF) 124

B

backprojection 85
Bayes 200
Bild
 Projektions– 81
 –raum 13
 –sensor 55
 –signalfunktion 38
Binomial
 –Funktion 115
 –koeffizienten, Tabelle 115
 –verteilung 27
Bloch–Gleichung 93

C

Camera, siehe Kamera
Canny–Detektor 162
CCD
 frame–transfer 67
 full–frame 66
 interline 67
 –Matrixsensor 63
 –Schieberegister 64
Clusteranalyse 209
Computer–Tomographie 82
Computer–Visualistik 3
cooccurrence matrix 148
Cosinus–Transformation (DCT) 127, 216

D

Delta
 –funktion, 2D 47
 –gerade 47
Dendogramm 210
Dephasierung 96
Dilatation 191
Diskretisierungsnetzwerk 176
Diskriminanzanalyse 204
Dispersion 23
Distanz 198
 –Funktion 176, 193
DPCM 215

E

Eigenfunktion 38
Enhancement 101
Entropie 215
 Verbund– 148
Entscheidungsregel 200
Erosion 191
Erwartung 23
Eulerscher Satz 38

F

Faltung 32, 36, 51
fanbeam 85
feature 143
Filter
 Bandpass– 116
 FIR– 110
 Hochpass– 116
 IIR– 117
 Kanten– 151
 Median– 120
 Optimal– 121
 rekursives 117
 Textur– 151
 Wiener– 121
Finite...
 Differenzen 183
 Elemente (FEM) 184

Fokussierung
 dynamische 74
Fourier
 –Deskriptor 181
 –Transformation 36
 –Transformation, 2D– 42

Freeman code 182

Funktion
 2D–Punkt– 47
 Autokorrelations– 124
 Binomial– 115
 Distanz– 176
 Eigen– 38
 Gauß– 23
 scha– 47
 Shape–density– 180
 si– 45
 Wellen– 38

Projektionsfunktion 53

G

Gammakamera 71, 99
Gauß–Funktion 23, 46
 2D– 46
Geometrie
 diskrete 176
 euklidische 16
Gestalt 174
 –gesetz 157
 –kriterien 187
Gradient 149
Graph 176

Grenzkontrast 24, 25
gyromagnetische Konstante 93

H

Halbbildverfahren 63
Hamming–Fenster 153
Harmonisierung 112
Hauptachsen–Transformation 204
Histogramm 107, 214
 –Equalisierung 106
 –Equalisierung, adaptive 108
 kumulatives 107
Homogenitätsmaß 168
Hough–Transformation 188
Hounsfield–Skala 88
Huffman–Code 215

I

Impuls
 2D–Delta– 31
 –antwort 29
Instanz 196
interlace scan 63
Interpolation
 bi–kubische 131
 bi–lineare 130
 Spline– 131
Irrelevanzreduktion 213

J

JPEG 217

K

Kamera
 Fernseh– 59
 Gamma– 71, 99
 Loch– 19
Kante 158
Kanten
 –Detektor 159
 –filter 151
 –Relaxation 164
Karhunen–Loève–Transformation 204
Kernspin–Tomographie 92
Klassifikation 195
Kodierung
 Prädiktions– 213
 Transformations– 216
Kollimator 71
Kompression 211
 verlustbehafteten 213
 verlustlose 213
Konnektivität 176
Kontrast 24, 148
Kontrasttransformation 105
Kontur 159, 163
 aktive 190
 diskrete 182
 kontinuierliche 179
 –Suche 187
Koordinaten 16
 homogene 16
Kovarianz 148
Kreuzkorrelation 151

L

Lamor-Frequenz 94
Laplace-Operator 150
Laserscanner 68
Leistungsdichte-Spektrum 124, 152
Lernen
 überwachtes 197, 203
 unüberwachtes 208
linearphasig 49
Linie
 Linienpaar, lp/mm 39
LSI-System 29

M

Magnetresonanz-Tomographie (MR) 92
Mahalanobis-Abstand 201
Manhattan-Abstand 198
Matrix
 Grauwertübergangs- 148
 Transformations- 17
Medianfilter 120
Merkmal 143
 spektrales 152
 statistisches 146
 Struktur- 149
Merkmals...
 -raum 197
 -vektor 154, 197
Minkowski-Addition, -Subtraktion 192
Mittelwert 147
modulation transfer function (MTF) 48

morphologische

 Öffnung 192
 Operationen 191
 Schließung 192
Muster 197

N

Neuronales Netz 206
Nipkow-Scheibe 59
Normalverteilung 23
Nuklearmedizin 71, 99
nullphasig 49, 118

O

Operation
 dyadische 102
 geometrische 128
 globale 125
 lokale 110
 monadische 103
 morphologische 191
 Punkt- 105
Operator
 Gradienten- 149
 Laplace- 150
 Sobel- 151
optical transfer function (OTF) 48
Optimal...
 -filter 121
 -kodierung 215

P

PET 100
phase transfer function (PTF) 48
phased array 74
Phasen
 -kodierung 97
 -winkel 39
photo multiplier tube (PMT) 72
photoelektrischer Effekt 59
Photogate 64
Pixel 21, 30
point spread function (PSF) 30
Prädiktionskodierung 213
Präzession 94
principal component analysis 204
progressive reconstruction 219
Projektion 95
 1D- 82
 Parallel- 82
 perspektivische 19
 Zentral- 19, 85
Projektionsfunktion 53
Protonenspin 93
Prototyp 196
Punkt
 -funktion 47
 -raster 47

Q

quad tree 170

Quanten

–fluenz 28

–fluss 28

–rauschen 27

R

Raster

hexagonales 177

pseudo–hexagonales 178

Rauschen 22

Photonen– 27

Quanten– 26

Quantisierungs– 26

Speckle– 75

thermisches 27

rect–Funktion 45

Redundanzreduktion 213

region growing 168

Rekonstruktion, 3D– 77

Relaxation

Kanten– 164

Kernspin– 94

Restauration 101

Röntgenstrahlung 27, 81

root–mean–square, rms 23

Rotation 18, 51

Rückprojektion 87

Runge–Gleichung 40

S

Scanning–Laser–Ophthalmoskop 69

Schätzung 23

Schwellwert 166

Segment 142

Segmentierung 142

Kanten–orientierte 155

Regionen–orientierte 166

Separierbarkeit 43

si–Funktion 45

signal-to-noise ratio (SNR) 29

Skalierung 18

Skelettierung 193

Sobel–Operator 151, 159

Speckle 75, 144

SPECT 99

Spektrum 40

Leistungsdichte– 124, 152

Spiegelung 51

Spline 131, 184

split and merge 169

Standardabweichung 23, 147

Statistik 147

subband coding 219

Symmetrie 51

Systemtheorie 35

Szintillator 71

T

Filter

Textur– 151

Textur 144

Theorem

der Fourier–Transformation 50

Abtast– 52

Zentralschnitt– 53

Tomographie

Computer– (CT) 82

MR– 92

Transducer

phased–array– 74

Ultraschall– 74

Transformation

Cosinus– 127, 216

Fourier– 36

geometrische 17

Hough– 188

Wavelet– 153, 219

Transformations–Kodierung 216

Translation 18

U

Übertragungsfunktion 40, 48

Ultraschall–Scanner 72

Unschärfe 29

–Relation 153

unsharp masking 114

V

Varianz 23, 147
Vektor 16
 Merkmals- 154
Verschiebungssatz 51
Verzerrung
 geometrische 129
 perspektivische 18
Vidicon 59
Visualisierung 8
Visualistik 1
Voxel 82, 88

W

Wahrscheinlichkeit 200
Wasserscheiden-Algorithmus 165
Wavelet-Transformation 153, 219
Welle...
 harmonische 44
 komplexe 38, 92
Wellen...
 -funktion 38
 -zahl 39
Wiener-Filter 121

Z

Zeilensprungverfahren 63
Zentralprojektion 19
Zentralschnitt-Theorem 53, 83

